



兰州工业学院

应用案例库

基础学科部

2025 年编制

Contents

《高等数学》课程应用案例库	1
案例1 导数与偏导数在液压传动中的应用	2
案例2 泰勒公式在车辆工程专业中的应用	5
案例3 不定积分在材料力学中的应用	8
案例4 微分方程在汽车动力学中的应用	11
案例5 工程测量中的误差传播定律推导	14
案例6 连续复利在衍生证券定价中的应用	17
案例7 经济学中的边际分析案例	20
案例8 经济学中的弹性分析案例	23
案例9 最值在企业逐利中的应用	27
案例10 离散型经济变量的价格模型	30
案例11 杆件形变问题分析案例	33
案例12 导弹追踪及飞行轨迹问题应用案例	38
案例13 攀岩问题应用案例	44
案例14 电感电路中的电流计算案例	47
案例15 阻容电路方程应用案例	50

案例16	放电电路研究应用案例	54
案例17	交流电路中的电功和平均功率应用案例	57
案例18	可变电阻器的调节案例	60
案例19	运动信号追踪案例	63
案例20	工程力学中的弯曲变形案例	67
案例21	游戏中导数与微分方程的应用案例	72
案例22	放射性物质泄漏研究案例	76
案例23	船舶设计中船体表面承载能力的计算	78
案例24	电磁学中计算电通量和磁通量的应用	81
案例25	低通RC 滤波电路应用案例	84
案例26	差分方程在存贷款中的应用	90
案例27	曲率在工程学安全设计中的应用	94
案例28	自适应滤波中的信号变化率建模	97
案例29	积分在下雪时间计算中的应用	101
案例30	静脉输入葡萄糖问题应用案例	104
	《线性代数》课程应用案例库	109
案例1	矩阵在图形图像处理中的应用案例	110
案例2	矩阵在加密技术中的应用案例	115
案例3	初等变换在最大公约数计算中的应用	121
案例4	矩阵运算在电路分析中的应用	126
案例5	线性代数在互联网信息检索中的应用	131

案例6	商品市场占有率问题	136
	《复变函数与积分变换》课程应用案例库	139
案例1	傅里叶变换在求解信号频谱中的应用	140
案例2	拉普拉斯变换在求解状态方程中的应用	145
案例3	拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用	150
案例4	复积分的物理意义——环量和通量	156
	《数值计算方法》课程应用案例库	159
案例1	拉格朗日插值应用案例I	160
案例2	拉格朗日插值应用案例II	164
案例3	最小二乘法的应用案例	168
	《大学物理》课程应用案例库	175
案例1	磁矩在磁传感器中的应用案例	176
案例2	光的偏振在电磁波极化方面的应用案例	180
案例3	角动量守恒定律在航空事业中的应用	186
案例4	稳恒磁场在电气工程中的应用案例	190
案例5	力学在工程问题中的应用案例	194
案例6	转动定律在新能源汽车中的应用	198
案例7	磁聚焦在电子显微镜技术中的应用	202
案例8	光学技术在航天工程中的应用	206
案例9	能量守恒定律在水电站建设中的应用	209
案例10	热学定律在发动机效率分析中的应用	214

案例11	分析阻尼振动中微分方程的应用	220
案例12	热力学循环在太阳能热发电中的应用	223
案例13	热力学第一定律在发动机效率分析中的应用	229
案例14	涡旋电场应用案例	233
	《运筹学》课程应用案例库	237
案例1	关键路径法在建筑施工中的应用	238
	《概率论与数理统计》课程应用案例库	247
案例1	正常人与中毒患者的脉搏差异	248
案例2	全概率公式在可靠性管控中的应用	250
案例3	中心极限定理在保险中的应用	253



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《高等数学》 课程应用案例库

案例1 导数与偏导数在液压传动中的应用

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在液压传动系统中，油缸和油马达是常见的执行元件。油缸活塞移动速度和油马达输出转速是衡量液压系统性能的重要指标，它们与液压油流量、油缸活塞作用面积、油马达容积效率等参数密切相关。

1.1.2 应用目标

通过分析油缸活塞移动速度和油马达输出转速相对于相关变量的变化率，有助于深入理解液压系统的工作特性，为液压系统的设计、调试和优化提供理论依据，比如在设计时合理选择液压泵流量，在调试时评估系统性能变化等。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

已知油缸活塞移动速度 $v = \frac{10Q_1}{F}$ 和油马达输出转速 $n = \frac{Q_2\eta_r}{10^{-3}q_0}$ 的计算公式，其中涉及多个物理量。需要分别求油缸活塞移动速度 v 相对于输入油缸的液压油流量 Q_1 的变化率，以及油马达输出转速 n 相对于液压油流量 Q_2 和油马达容积效率 η_r 的变化率。

1.2.2 需求分析

从数学角度看，这是求函数关于自变量的变化率问题，即求偏导数。在实际应用中，了解这些变化率能帮助工程师预测系统参数变化对油缸和油马达工作状态的影响，从而更好地控制和调节液压系统。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

将油缸活塞移动速度 v 看作是关于 Q_1 的函数 $v(Q_1) = \frac{10Q_1}{F}$ (F 为常数), 油马达输出转速 n 看作是关于 Q_2 和 η_r 的函数 $n(Q_2, \eta_r) = \frac{Q_2\eta_r}{10^{-3}q_0}$ (q_0 为常数)。

1.3.2 方法选择

根据变化率的定义, 对于一元函数求变化率使用导数, 对于多元函数求关于某个自变量的变化率使用偏导数。所以对于 $v(Q_1)$ 求导数, 对于 $n(Q_2, \eta_r)$ 分别求关于 Q_2 和 η_r 的偏导数。

1.4 模型求解与结果分析

(1) 油缸活塞移动速度 v 相对于 Q_1 的变化率:

对 $v(Q_1) = \frac{10Q_1}{F}$ 求导, 可得

$$v'(Q_1) = \frac{10}{F}.$$

这表明在油缸活塞作用面积 F 一定时, 油缸活塞移动速度 v 相对于输入油缸的液压油流量 Q_1 的变化率是一个常数 $\frac{10}{F}$, 意味着 Q_1 每增加一个单位, v 就会按照 $\frac{10}{F}$ 的比例增加。

(2) 油马达输出转速 n 相对于 Q_2 的变化率:

对 $n(Q_2, \eta_r) = \frac{Q_2\eta_r}{10^{-3}q_0}$ 求关于 Q_2 的偏导数, 把 η_r 看作常数, 可得

$$\frac{\partial n}{\partial Q_2} = \frac{\eta_r}{10^{-3}q_0}.$$

说明在油马达容积效率 η_r 和理论排量 q_0 一定时, 油马达输出转速 n 相对于液压油流量 Q_2 的变化率取决于 η_r 和 q_0 , Q_2 变化时, n 按照 $\frac{\eta_r}{10^{-3}q_0}$ 的比例变化。

(3) 油马达输出转速 n 相对于 η_r 的变化率:

对 $n(Q_2, \eta_r) = \frac{Q_2\eta_r}{10^{-3}q_0}$ 求关于 η_r 的偏导数, 把 Q_2 看作常数, 可得

$$\frac{\partial n}{\partial \eta_r} = \frac{Q_2}{10^{-3}q_0}.$$

这意味着在液压油流量 Q_2 和理论排量 q_0 一定时, η_r 变化会使 n 按照 $\frac{Q_2}{10^{-3}q_0}$ 的比例变化。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

在实际液压系统设计中, 可根据这些变化率来确定液压泵的选型, 比如要实现一定的油缸活塞移动速度变化范围, 可根据 $v'(Q_1)$ 来计算所需的 Q_1 变化范围, 进而选择合适流量范围的液压泵; 对于油马达, 可根据 $\frac{\partial n}{\partial Q_2}$ 和 $\frac{\partial n}{\partial \eta_r}$ 来评估系统内漏 (影响 η_r) 和流量波动对转速的影响, 提前采取补偿措施。

1.5.2 反思总结

该模型基于理论公式, 实际液压系统中可能存在各种非线性因素和干扰, 如管道阻力、油液粘性变化等, 会使实际变化率与理论值有偏差。后续研究可考虑引入修正系数或建立更复杂的包含这些因素模型, 以提高分析的准确性。同时, 在实际应用中还需结合工程经验对计算结果进行调整和优化。

案例2 泰勒公式在车辆工程专业中的应用

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

在汽车行驶过程中，加速度是描述速度变化快慢的物理量。研究汽车行驶过程中的加速度特性，对于汽车工程领域至关重要，例如汽车的动力性能评估、制动系统设计以及乘坐舒适性分析等方面都与之相关。

2.1.2 应用目标

通过证明在汽车行驶过程中存在某一时刻加速度绝对值满足特定条件，有助于从理论层面深入理解汽车行驶时速度变化的规律，为汽车性能优化和相关技术改进提供理论依据。例如在汽车动力学仿真、驾驶辅助系统研发等方面，可基于此理论进行更精准的模拟和设计。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

已知汽车在 T 小时时间内行驶了 L 千米的路程，需要证明在这个行驶过程中必然存在某一时刻，此时汽车加速度的绝对值不小于 $\frac{4L}{T^2}\text{km/h}^2$ 。

2.2.2 需求分析

从数学角度看，这是一个关于函数性质证明的问题，需要将汽车行驶路程与时间的关系抽象为数学函数，利用函数的导数（速度是路程对时间的一阶导数，加速度是路程对时间的二阶导数）相关知识来进行证明。从实际应用角度，明确加速度的取值范围能为汽车性能指标设定、驾驶策略制定等提供参考。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.0.1 问题建模

设汽车行驶的路程 s 关于时间 t 的函数为 $s(t)$, $t \in [0, T]$ 。已知 $s(0) = 0$, $s(T) = L$ 。根据导数的物理意义, 速度 $v(t) = s'(t)$, 加速度 $a(t) = s''(t)$ 。

2.3.1 方法选择

这里采用泰勒公式来进行证明。泰勒公式可以将一个函数在某点展开成多项式形式, 能很好地建立函数值、函数导数与自变量之间的关系, 适合解决此类涉及函数高阶导数性质的证明问题。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

1. 利用泰勒公式展开:

将 $s(t)$ 在 $t = 0$ 和 $t = T$ 处分别进行泰勒展开。

在 $t = 0$ 处展开:

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(\xi_1)}{2!}t^2$$

其中 $\xi_1 \in (0, t)$ 。因为 $s(0) = 0$, 所以 $s(t) = s'(0)t + \frac{s''(\xi_1)}{2}t^2$ 。

在 $t = T$ 处展开:

$$s(t) = s(T) + s'(T)(t - T) + \frac{s''(\xi_2)}{2!}(t - T)^2$$

其中 $\xi_2 \in (t, T)$ 。因为 $s(T) = L$, 所以 $s(t) = L + s'(T)(t - T) + \frac{s''(\xi_2)}{2}(t - T)^2$ 。

2. 令 $t = \frac{T}{2}$ 并推导:

当 $t = \frac{T}{2}$ 时, 由 $s(\frac{T}{2})$ 的两种展开式可得:

$$s(\frac{T}{2}) = s'(0)\frac{T}{2} + \frac{s''(\xi_1)}{2}(\frac{T}{2})^2$$

$$s(\frac{T}{2}) = L + s'(T)(\frac{T}{2} - T) + \frac{s''(\xi_2)}{2}(\frac{T}{2} - T)^2 = L - s'(T)\frac{T}{2} + \frac{s''(\xi_2)}{2}(\frac{T}{2})^2$$

两式相减消去 $s(\frac{T}{2})$ 得:

$$0 = L - \frac{T}{2}[s'(T) + s'(0)] + \frac{T^2}{8}[s''(\xi_2) - s''(\xi_1)]$$

假设 $|s''(\xi)|$ 表示 $s''(\xi_1)$ 和 $s''(\xi_2)$ 中绝对值较大者, 则:

$$L = \frac{T}{2}[s'(T) + s'(0)] - \frac{T^2}{8}[s''(\xi_2) - s''(\xi_1)]$$

根据绝对值不等式 $|a - b| \leq |a| + |b|$, 有

$$L \leq \frac{T}{2}|s'(T)| + \frac{T}{2}|s'(0)| + \frac{T^2}{8}(|s''(\xi_2)| + |s''(\xi_1)|) \leq \frac{T^2}{4}|s''(\xi)| \quad (\Phi \approx \Gamma > 0) \Psi$$

所以 $|s''(\xi)| \geq \frac{4L}{T^2}$, 即存在某一时刻 ξ , 汽车加速度的绝对值不小于 $\frac{4L}{T^2} \text{ km/h}^2$ 。

2.4.2 结果分析

该结果表明在汽车行驶的整个过程中, 无论其速度变化过程多么复杂, 必然存在一个时刻加速度绝对值能达到一定下限。这从理论上界定了汽车行驶时速度变化的剧烈程度下限, 为汽车性能评估提供了量化的参考标准。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

在汽车制造领域, 可用于评估发动机的动力输出特性和制动系统的效能, 例如在设计新型汽车时, 根据这个理论可以合理规划发动机的扭矩输出曲线和制动系统的制动力分配, 以满足加速度性能要求; 在智能交通系统中, 可用于车辆行驶状态监测和驾驶行为分析, 判断驾驶员的操作是否平稳等。

2.5.2 反思总结

此模型基于理想的数学假设, 实际汽车行驶过程中会受到路面状况、风阻、车辆负载等多种因素影响, 加速度变化会更加复杂。后续可以考虑将这些实际因素纳入模型, 使理论分析更贴近实际情况。同时, 对于不同类型的车辆(如赛车、家用轿车等), 其性能指标要求不同, 可根据具体需求进一步细化和调整该理论的应用。

案例3 不定积分在材料力学中的应用

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

在材料力学领域，梁的弯曲问题是重要研究内容。我国多数材料力学教材都阐述了梁弯曲时外力（以荷载集度 $q(x)$ 表示）与梁任意截面内力（剪力 $F_s(x)$ 、弯矩 $M(x)$ ）之间的微分关系。这是材料力学中分析梁结构力学性能的基础理论。

3.1.2 应用目标

通过理解和运用这些微分关系，能够判断梁每段截面上内力函数的分布形式，进而快速绘制内力图。同时，从微积分角度讲解求梁任意截面上内力的方法，有助于锻炼学生的数理应用能力，为后续梁的强度、刚度计算及结构设计等实际工程应用奠定理论基础。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

已知梁弯曲时外力（荷载集度 $q(x)$ ）与梁任意截面内力（剪力 $F_s(x)$ 、弯矩 $M(x)$ ）之间的微分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x), \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

需要利用这些关系确定梁截面上内力函数的分布形式，并求出任意截面上的内力。

3.2.2 需求分析

从工程实际角度，准确掌握梁的内力分布对于设计合理的梁结构至关重要，如建筑工程中

的梁、机械工程中的轴等。从教学角度，学生需要掌握基于这些微分关系的内力求解方法，提升数理知识在力学问题中的应用能力。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题建模

将梁所受荷载、剪力和弯矩分别用函数 $q(x)$ 、 $F_s(x)$ 、 $M(x)$ 表示，基于材料力学理论建立起它们之间的微分关系模型，即上述的三个微分方程。

3.3.2 方法选择

利用微积分知识进行求解。通过对微分关系进行积分运算，得到剪力和弯矩关于荷载集度的积分表达式

$$F_s(x) = \int q(x)dx + C_1, \quad M(x) = \int(\int q(x)dx)dx + C_1x + C_2$$

同时，依据控制截面上已知的内力值来确定积分常数 C_1 和 C_2 。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 求解过程

- 对 $\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$ 进行积分，根据不定积分的运算规则，得到

$$F_s(x) = \int q(x)dx + C_1$$

- 再对 $\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$ 积分，将 $F_s(x)$ 代入可得

$$M(x) = \int(\int q(x)dx)dx + C_1x + C_2$$

- 通过控制截面上已知的剪力和弯矩值（如梁的端部等特殊位置），代入上述表达式求解出积分常数 C_1 和 C_2 ，从而确定具体的剪力和弯矩函数。

3.4.2 结果分析

得到的剪力 $F_s(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 函数表达式，能够精确描述梁在不同位置处的内力情况。这些表达式为绘制内力图提供了准确依据，通过分析内力图可以清晰了解梁的受力薄弱点，为梁的结构设计和强度校核提供有力支持。同时，从教学方面，学生通过参与这样的求解过程，能更好地理解微积分在力学问题中的应用，提升解决实际工程问题的能力。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

在实际工程中，除了常规的直梁，该方法还可应用于曲梁、变截面梁等复杂结构的内力分析，通过适当调整荷载集度函数和边界条件来适应不同结构特点。在机械设计中，对于承受复杂载荷的轴类零件，也可借鉴此方法分析其内力，为轴的优化设计提供参考。

3.5.2 反思总结

此模型基于材料力学的基本假设，如平截面假设等，实际工程中可能存在与假设不符的情况，如大变形、非线性材料等，会影响内力分析的准确性。后续可考虑引入更高级的力学理论和数值计算方法，如有限元法等，来处理复杂情况。同时，在教学过程中，可以进一步引导学生思考理论与实际的差异，培养学生的创新思维和工程实践能力。

案例4 微分方程在汽车动力学中的应用

4.1 背景简介与应用目标

4.1.1 背景简介

在研究电车这类交通工具的运动时，了解其动力学特性至关重要。电车在启动过程中，牵引力随时间变化，同时受到摩擦力影响，这涉及到牛顿运动定律等力学知识。

4.1.2 应用目标

通过求解电车的运动方程，能够准确描述电车在启动阶段的运动状态，包括速度、位移随时间的变化情况。这对于电车的设计、性能优化以及运行控制等方面具有重要意义，例如合理规划启动时间、优化动力系统等。

4.2 问题描述与需求分析

4.2.1 问题描述

已知电车质量 $m = 10^4\text{kg}$ ，牵引力 $F = 1176t(\text{N})$ 随时间 t 成正比增加，初速度为 0，最大摩擦力 $F_{max} = 1960\text{N}$ ，需要求解电车的运动方程。

4.2.2 需求分析

从物理原理出发，要确定电车的运动方程，需根据牛顿第二定律 $F_{\Phi} = ma$ 建立力与加速度的关系，再通过积分等数学手段求解速度和位移随时间的变化关系。这要求综合运用力学和数学知识，准确分析电车所受合力的变化情况。

4.3 问题建模与方法选择

4.3.1 问题建模

首先分析电车所受合力 F_{Φ} , $F_{\Phi} = F - F_f$ (F_f 为摩擦力), 当 $F_{\Phi} > 0$ 时电车开始加速运动。

根据牛顿第二定律 $F_{\Phi} = ma$, 其中 a 为加速度, $a = \frac{dv}{dt}$ (v 为速度), $v = \frac{ds}{dt}$ (s 为位移), 建立起力与运动状态量之间的关系模型。

4.3.2 方法选择

利用牛顿第二定律建立微分方程, 再通过分离变量、积分等方法求解微分方程, 得到速度 v 和位移 s 关于时间 t 的函数, 即运动方程。

4.4 模型求解与结果分析

1. 判断电车开始运动的时刻:

当电车开始运动时, $F = F_{max}$, 即 $1176t = 1960$, 解得 $t_0 = \frac{1960}{1176} = \frac{5}{3}$ s 。

2. 求解加速度 a :

在 $t \geq \frac{5}{3}$ s 时, 根据牛顿第二定律 $F - F_{max} = ma$, 将 $F = 1176t$, $m = 10^4$ kg , $F_{max} = 1960$ N 代入, 可得 $a = \frac{1176t - 1960}{10^4}$ 。

3. 求解速度 v :

对加速度 a 进行积分求速度 v

$$v = \int_{t_0}^t a dt = \int_{\frac{5}{3}}^t \frac{1176t - 1960}{10^4} dt = \frac{1}{10^4} [588t^2 - 1960t]_{\frac{5}{3}}^t = \frac{1}{10^4} (588t^2 - 1960t)$$

4. 求解位移 s :

对速度 v 进行积分求位移 s

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t v dt = \int_{\frac{5}{3}}^t \frac{588t^2 - 1960t}{10^4} dt = \frac{1}{10^4} [196t^3 - 980t^2]_{\frac{5}{3}}^t \\ &= \frac{1}{10^4} (196t^3 - 980t^2 - 196 \times (\frac{5}{3})^3 + 980 \times (\frac{5}{3})^2) \end{aligned}$$

5. 结果分析:

得到的速度 v 和位移 s 关于时间 t 的表达式即为电车的运动方程。通过这些方程可以清晰了解电车在启动后的速度和位移变化情况。例如，根据速度方程可以分析电车的加速过程，根据位移方程可以确定电车在不同时刻的位置。

4.5 应用扩展与反思总结

4.5.1 应用扩展

对于其他类型的车辆或运动物体，若其牵引力或动力变化有规律，可借鉴此方法求解运动方程，分析其运动特性，为动力系统设计和性能优化提供参考。

在交通系统规划中，可根据电车的运动方程预测其运行时间、能耗等，合理安排线路和调度车辆。

4.5.2 反思总结

此模型忽略了一些实际因素，如空气阻力、路面不平对摩擦力的影响等，这些因素可能会使实际运动情况与理论计算有偏差。后续可考虑将这些因素纳入模型，使分析更贴近实际。

在求解过程中，假设电车的质量不变，但在一些特殊情况下（如电车载货量变化），质量会发生改变，需要进一步研究变质量情况下的运动方程求解。

案例5 工程测量中的误差传播定律推导

5.1 背景简介与应用目标

5.1.1 背景简介

在工程测量领域，测量误差是不可避免的。观测值往往存在一定的不确定性，而很多测量成果是通过多个观测值经过函数关系计算得到的。了解误差如何在这些函数关系中传播，对于评估测量结果的精度至关重要。

5.1.2 应用目标

通过推导误差传播定律，能够定量地分析出各个观测值的误差对最终计算结果误差的影响程度。这有助于在工程测量前期合理设计测量方案，选择合适的测量仪器和观测方法；在测量后期对测量结果进行精度评定和质量控制。

5.2 问题描述与需求分析

5.2.1 问题描述

需要利用全微分的知识，推导出工程测量中误差在函数关系中的传播规律，即误差传播定律。已知对每个观测值 x_i 进行 n 次同精度观测，以及真误差 ΔZ_j 与观测值误差 Δx_{ij} 的近似关系 $\Delta Z_j \approx dZ_j = f_{x_1}\Delta x_{1j} + f_{x_2}\Delta x_{2j} + \cdots + f_{x_n}\Delta x_{nj}$ ，要据此得出函数 Z 中误差 m_Z 的表达式。

5.2.2 需求分析

从测量实践角度，工程中很多测量量（如距离、角度、高程等）经过函数运算得到最终成果（如坐标计算），需要明确各个原始测量量的误差会如何影响最终成果的误差。从理论研究

角度，建立起误差传播的数学模型，为测量误差理论的完善和发展提供支持。

5.3 问题建模与方法选择

5.3.1 问题建模

将观测值 x_i 看作自变量，函数 $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示测量成果与观测值之间的函数关系。根据全微分原理，当自变量有微小变化 Δx_i 时，函数 Z 的变化量 dZ 可以近似表示为 $dZ = f_{x_1}\Delta x_1 + f_{x_2}\Delta x_2 + \dots + f_{x_n}\Delta x_n$ ，其中 f_{x_i} 是函数 Z 对 x_i 的偏导数。这里将真误差 ΔZ_j 近似等同于 dZ_j 来建立误差传播的模型。

5.3.2 方法选择

运用全微分的概念来近似表示观测值误差与函数值误差之间的关系，再结合中误差的计算公式 $m^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta^2$ （ Δ 为真误差）进行推导。

5.4 模型求解与结果分析

1. 推导过程：

已知 $\Delta Z_j \approx dZ_j = f_{x_1}\Delta x_{1j} + f_{x_2}\Delta x_{2j} + \dots + f_{x_n}\Delta x_{nj}$ 。根据中误差计算公式

$$m_Z^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Delta Z_j)^2$$

将 ΔZ_j 的近似表达式代入可得：

$$m_Z^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Delta Z_j)^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (dZ_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (f_{x_i} \Delta x_{ij}) \right]^2$$

由于是同精度观测，设观测值 x_i 的中误差为 m_i ，根据方差的性质和数学运算，进一步化简得到

$$m_Z^2 = \sum_{i=1}^n (f_{x_i} m_i)^2.$$

2. 结果分析：

得到的误差传播定律表达式 $m_Z^2 = \sum_{i=1}^n (f_{x_i} m_i)^2$ 表明，函数 Z 的中误差平方等于各个观测值的偏导数与对应观测值中误差乘积的平方和。这清晰地展示了每个观测值的误差对最终函

数值误差的贡献方式，偏导数 f_{x_i} 反映了观测值 x_i 对函数 Z 的影响权重，中误差 m_i 体现了观测值 x_i 本身的精度情况。

5.5 应用扩展与反思总结

5.5.1 应用扩展

在地形测量中，利用误差传播定律可以评估由距离和角度观测误差引起的坐标计算误差，从而合理控制测量精度，优化测量方案。

在建筑工程测量中，可用于分析建筑物变形监测中各个观测点误差对整体变形计算结果的影响，为建筑物的安全评估提供依据。

5.5.2 反思总结

该推导基于同精度观测等假设条件，实际测量中可能存在不同精度观测的情况，需要进一步拓展误差传播定律以适应更复杂的测量场景。

推导过程中采用了真误差近似等于微分的方式，在误差较大时可能会存在一定误差，后续研究可考虑采用更精确的方法来建立误差传播模型。

案例6 连续复利在衍生证券定价中的应用

6.1 背景简介与应用目标

6.1.1 背景简介

在金融投资领域，利息的计算方式多种多样。复利计算是一种常见且重要的方式，它考虑了本金和前期利息在后续周期中产生的利息，相比单利更能体现资金的时间价值。不同的复利计算频率（如每年复利、每年多次复利、连续复利）会对最终的本利和产生影响。

6.1.2 应用目标

对于投资者而言，了解不同利息计算方式下的本利和，有助于合理规划投资策略，比较不同投资产品的收益情况。通过计算在给定本金、年利率和投资期限下，不同复利方式的本利和，投资者可以选择收益最大化的投资方案。

6.2 问题描述与需求分析

6.2.1 问题描述

已知投资者本金为 10000 元，投资期限为 5 年，年利率为 6%，需要分别按照复利（每年复利一次）、每年按 4 次复利和连续复利的付息方式，计算到第 5 年末时投资者应得的本利和。

6.2.2 需求分析

从数学角度，需要运用不同的复利计算公式来求解本利和。从投资实际角度，投资者希望明确不同复利方式下的收益情况，以便做出更优的投资决策，如选择储蓄、债券、理财产品等不同投资渠道时，考虑其利息计算方式对收益的影响。

6.3 问题建模与方法选择

6.3.1 问题建模

1. 复利（每年复利一次）：设本金为 P ，年利率为 r ，投资期限为 n 年，本利和为 A ，则模型为 $A = P(1 + r)^n$ 。

2. 每年按 m 次复利：模型为 $A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$ ，这里 $m = 4$ 。

3. 连续复利：模型为 $A = Pe^{rn}$ ，其中 e 为自然常数。

6.3.2 方法选择

根据不同复利方式对应的数学模型，将已知的本金 $P = 10000$ 元，年利率 $r = 0.06$ ，投资期限 $n = 5$ 代入相应公式进行计算。

6.4 模型求解与结果分析

1. 复利（每年复利一次）：将 $P = 10000$ ， $r = 0.06$ ， $n = 5$ 代入 $A = P(1 + r)^n$ ，得：

$$A = 10000 \times (1 + 0.06)^5 = 10000 \times 1.06^5 \approx 10000 \times 1.338226 = 13382.26$$

2. 每年按 4 次复利：此时 $m = 4$ ，将 $P = 10000$ ， $r = 0.06$ ， $n = 5$ ， $m = 4$ 代入 $A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$ ，得：

$$A = 10000 \times \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4 \times 5} = 10000 \times (1 + 0.015)^{20} \approx 10000 \times 1.346855 = 13468.55$$

3. 连续复利：将 $P = 10000$ ， $r = 0.06$ ， $n = 5$ 代入 $A = Pe^{rn}$ ，得：

$$A = 10000 \times e^{0.06 \times 5} = 10000 \times e^{0.3} \approx 10000 \times 1.34986 = 13498.6$$

4. 结果分析：三种复利方式下本利和大小关系为：连续复利（13498.6 元）> 每年按 4 次复利（13468.55 元）> 每年复利一次（13382.26 元）。这表明复利计算频率越高，最终的本利和越大，因为更频繁的复利计算使得利息能更快地参与到下一期的计息中，充分体现了资金的时间价值。

6.5 应用扩展与反思总结

6.5.1 应用扩展

在银行储蓄业务中，储户可以根据不同的储蓄产品（如定期存款的不同复利方式），结合自己的资金闲置时间和预期收益，选择合适的储蓄方案。在企业投资决策中，对于不同投资项目（如债券投资、项目投资等），可以通过计算不同复利方式下的收益，评估项目的可行性和投资价值。

6.5.2 反思总结

实际金融投资中，除了利息计算方式，还存在手续费、税收等因素会影响实际收益，在投资决策时需要综合考虑。不同复利方式的计算模型基于理想的数学假设，实际金融市场可能存在利率波动等不确定性因素，后续研究可以考虑引入随机利率模型等，使计算结果更符合实际情况。

案例7 经济学中的边际分析案例

7.1 背景简介与应用目标

7.1.1 背景简介

在企业生产经营中，成本和收入是重要的考量因素。边际成本和边际收入是经济学中用于分析企业生产决策的重要概念。边际成本反映了每增加一单位产量所增加的成本，边际收入则反映了每增加一单位销售量所增加的收入。通过对它们的研究，可以帮助企业优化生产规模，制定合理的销售策略，以实现利润最大化。

7.1.2 应用目标

对于生产散热器的工厂而言，计算边际成本和边际收入，能够明确在当前生产规模下，增加或减少生产和销售数量对成本和收入的影响，从而指导企业做出更合理的生产和销售决策，比如是否需要扩大生产规模、调整定价策略等。

7.2 问题描述与需求分析

7.2.1 问题描述

已知生产 x 台散热器的成本函数 $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ，收入函数 $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ ，工厂每天生产 10 台散热器。需要计算此时散热器的边际成本，并解释其含义；同时估计每天售出 10 台散热器时的边际收入，并解释其含义。

7.2.2 需求分析

从数学角度，需要运用导数的知识来求解边际成本和边际收入。从企业经营实际角度，企业管理者需要通过这些数据了解生产和销售变动对成本和收入的具体影响程度，以便在生产、

销售等环节做出科学决策，避免盲目扩大或缩小生产规模导致利润受损。

7.3 问题建模与方法选择

7.3.1 问题建模

边际成本是成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ ，表示产量为 x 时，每增加一单位产量成本的变化量。

边际收入是收入函数 $r(x)$ 的导数 $r'(x)$ ，表示销售量为 x 时，每增加一单位销售量收入的变化量。

7.3.2 方法选择

根据求导公式 $(X^n)' = nX^{n-1}$ 对成本函数 $C(x)$ 和收入函数 $r(x)$ 求导，然后将 $x = 10$ 代入导数表达式，分别计算边际成本和边际收入。

7.4 模型求解与结果分析

1. 计算边际成本：

对成本函数 $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ 求导，根据求导公式 $(X^n)' = nX^{n-1}$ 可得：

$$C'(x) = (x^3 - 6x^2 + 15x)' = 3x^2 - 12x + 15。$$

将 $x = 10$ 代入 $C'(x)$ ：

$$C'(10) = 3 \times 10^2 - 12 \times 10 + 15 = 300 - 120 + 15 = 195 \text{ (元)}。$$

含义：当工厂每天生产 10 台散热器时，每多生产 1 台散热器，成本会增加 195 元。这可以帮助工厂判断在当前生产规模下，继续扩大生产是否会带来过高的成本增加，如果增加的成本过高且超过了可能带来的收入增加，那么就需要谨慎考虑是否扩大生产。

2. 计算边际收入：

对收入函数 $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ 求导，根据求导公式可得：

$$r'(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x)' = 3x^2 - 6x + 12。$$

将 $x = 10$ 代入 $r'(x)$ ：

$$r'(10) = 3 \times 10^2 - 6 \times 10 + 12 = 300 - 60 + 12 = 252 \text{ (元)}。$$

含义：当工厂每天销售 10 台散热器时，每多销售 1 台散热器，收入会增加 252 元。这为工厂制定销售策略提供了参考，如果边际收入大于边际成本，那么适当增加销售量可能会增加

利润；反之，则需要考虑调整销售策略或控制生产规模。

7.5 应用扩展与反思总结

7.5.1 应用扩展

在生产其他产品的企业中，同样可以运用边际成本和边际收入的概念来指导生产和销售决策。例如电子产品制造企业、服装生产企业等，通过计算边际成本和边际收入，优化生产数量和销售价格，以提高企业利润。

在制定长期生产规划时，除了考虑当前的边际成本和边际收入，还可以结合市场需求的变化趋势、原材料价格波动等因素，进行更全面的分析和决策。

7.5.2 反思总结

这里的成本和收入函数是基于一定假设构建的，实际生产中可能存在固定成本的变动、市场竞争导致的价格波动等复杂情况，会使成本和收入函数与理论模型存在偏差。后续可以考虑引入更复杂的函数模型，纳入更多实际因素，提高分析的准确性。

边际成本和边际收入只是企业决策的部分依据，还需要综合考虑企业的长期发展战略、市场份额、品牌形象等因素，进行全面的权衡和决策。

案例8 经济学中的弹性分析案例

8.1 背景简介与应用目标

8.1.1 背景简介

这三个例子均聚焦于经济学中的弹性分析，借助导数与偏导数工具，探究价格、收入等经济变量对需求量或收入的影响机制。弹性分析是经济学中衡量变量间相对变化关系的关键手段，为理解市场动态提供了量化视角。

8.1.2 应用目标

协助企业与决策者制定科学策略。例如，企业依据弹性分析调整产品定价以优化利润，政府借助弹性分析制定宏观政策以平衡市场供需，推动经济稳健发展。

8.2 问题描述与需求分析

8.2.1 问题描述

例1 已知体育用品店中篮球价格80元，乒乓球价格2元，月销量分别为2000个和8000个，提价1元后月销量变为1980个和2000个，试讨论收入变化及需求价格弹性。

例2 设某城市计划建设一批经济住房，如果价格为 p (单位：百元/平方米)，需求量为 Q (单位：百间)，当地居民年均收入为 y (单位：万元)，根据分析调研，得到需求函数为

$$Q = 10 + py - \frac{p^2}{10}.$$

求当 $p = 30$ ， $y = 3$ 时，需求 Q 对价格 p 和收入 y 的偏弹性，并解释其经济含义。

例3 某品牌数码相机的需求量 Q ，除与自身价格 p_1 (单位：百元)有关外，还与彩色喷墨

打印机的价格 p_2 (单位: 百元)有关, 需求函数为

$$Q = 120 + \frac{100}{p_1} - 10p_2 - p_2^2.$$

求 $p_1 = 20$, $p_2 = 5$ 时需求量 Q 的直接价格弹性和交叉价格弹性, 并说明数码相机和彩色喷墨打印机是相互补充关系还是相互竞争关系?

8.2.2 需求分析

从数学层面, 需运用导数、偏导数知识计算弹性; 从经济实践角度, 决策者依赖这些弹性数据评估价格变动对收入、需求的影响, 进而在企业定价、生产规划及政府政策制定等方面做出科学决策。

8.3 问题建模与方法选择

8.3.1 问题建模

例1构建需求价格弹性模型 $\eta = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$, 结合收入公式 $R = P \times Q$ 分析价格变动对收入的影响。

例2依据偏弹性定义建模

$$E_p = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p} \times p}{Q}, \quad E_y = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} \times y}{Q}$$

例3按照下列直接价格弹性 E_1 和交叉价格弹性 E_2 的定义建模:

$$E_1 = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p_1} \times p_1}{Q}, \quad E_2 = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p_2} \times p_2}{Q}.$$

8.3.2 方法选择

例1运用比例运算计算需求价格弹性, 通过四则运算分析收入变化。

例2和例3利用偏导数求导公式计算偏导数, 进而求得弹性。

8.4 模型求解与结果分析

8.4.1 体育用品店

1. 计算需求价格弹性:

对于篮球:

已知篮球价格 $P_1 = 80$ 元, 销量 $Q_1 = 2000$ 个, 提价 $\Delta P = 1$ 元后, 销量变为

$$Q'_1 = 1980 \text{ 个}, \Delta Q = 1980 - 2000 = -20 \text{ 个}.$$

代入需求价格弹性公式 $\eta = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$, 得篮球的需求价格弹性

$$\eta_1 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{-1\%}{1.25\%} = -0.8.$$

对于乒乓球:

乒乓球价格 $P_2 = 2$ 元, 销量 $Q_2 = 8000$ 个, 提价 $\Delta P = 1$ 元后, 销量变为

$$Q'_2 = 2000 \text{ 个}, \Delta Q = 2000 - 8000 = -6000 \text{ 个},$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{2} = 50\%, \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{-6000}{8000} = -75\%.$$

得乒乓球的需求价格弹性

$$\eta_2 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{-75\%}{50\%} = -1.5.$$

2. 分析收入变化:

篮球提价前收入 $R_1 = P_1 \times Q_1 = 80 \times 2000 = 160000$ 元。

提价后收入 $R'_1 = (P_1 + \Delta P) \times Q'_1 = (80 + 1) \times 1980 = 81 \times 1980 = 160380$ 元。

收入增加。

乒乓球提价前收入 $R_2 = P_2 \times Q_2 = 2 \times 8000 = 16000$ 元。

提价后收入 $R'_2 = (P_2 + \Delta P) \times Q'_2 = (2 + 1) \times 2000 = 3 \times 2000 = 6000$ 元。

收入减少。

8.4.2 经济住房

1. 求偏导数:

需求函数 $Q = 10 + py - \frac{p^2}{10}$, 对 p 求偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial p} = y - \frac{2p}{10} = y - \frac{p}{5}$; 对 y 求偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial y} = p$ 。

2. 代入计算偏弹性:

当 $p = 30$, $y = 3$ 时, 计算 $Q = 10 + 30 \times 3 - \frac{30^2}{10} = 10 + 90 - 90 = 10$, 则

需求对价格的偏弹性

$$E_p = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p} \times p}{Q} = \frac{(3 - \frac{30}{5}) \times 30}{10} = \frac{(3 - 6) \times 30}{10} = \frac{-3 \times 30}{10} = -9.$$

需求对收入的偏弹性

$$E_y = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} \times y}{Q} = \frac{30 \times 3}{10} = 9.$$

二者的含义为：价格每提高 1% 且收入不变，需求量减少 9%；收入每增加 1% 且价格不变，需求量增加 9%。

8.4.3 数码相机

1. 求偏导数：

需求函数 $Q = 120 + \frac{100}{p_1} - 10p_2 - p_2^2$ ，

对 p_1 求偏导数，得 $\frac{\partial Q}{\partial p_1} = -\frac{100}{p_1^2}$ ；对 p_2 求偏导数，得 $\frac{\partial Q}{\partial p_2} = -10 - 2p_2$ 。

2. 代入计算弹性：

当 $p_1 = 20$ ， $p_2 = 5$ 时，计算 $Q = 120 + \frac{100}{20} - 10 \times 5 - 5^2 = 50$ ，则

直接价格弹性：

$$E_1 = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p_1} \times p_1}{Q} = \frac{-\frac{100}{20^2} \times 20}{50} = \frac{-\frac{100}{20}}{50} = \frac{-5}{50} = -0.1.$$

交叉价格弹性：

$$E_2 = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p_2} \times p_2}{Q} = \frac{(-10 - 2 \times 5) \times 5}{50} = \frac{(-10 - 10) \times 5}{50} = \frac{-20 \times 5}{50} = -2.$$

因交叉价格弹性为负，判断数码相机和彩色喷墨打印机为互补关系。

8.5 应用扩展与反思总结

8.5.1 应用扩展

可推广至更多领域，如金融产品的利率弹性分析、农产品的供需弹性分析等，为企业产品研发、定价及政府政策制定提供参考。

8.5.2 反思总结

这些模型基于简化假设，实际经济环境中存在消费者心理变化、信息不对称等复杂因素，可能影响弹性分析准确性。后续研究可纳入更多影响因素改进模型，结合大数据等技术提升弹性分析的精度与实用性。

案例9 最值在企业逐利中的应用

9.1 背景简介与应用目标

9.1.1 背景简介

在企业运营中，成本控制是关乎盈利的关键因素。对于有原材料运输和贮存需求的企业，运输成本和贮存成本往往相互关联且此消彼长。如何平衡这两种成本，使总成本最小化，是企业生产规划中常见的问题。一元函数、二元函数的极值及其最值等数学知识，能为解决这类成本优化问题提供有力工具。

9.1.2 应用目标

通过运用函数极值和最值的方法，帮助企业确定最优的原材料运输和贮存策略，从而降低生产成本，提高企业利润。具体到该案例，是帮助贮木场制作者找到使每天平均成本最小的原材料运输周期和运输量，为企业生产决策提供量化依据。

9.2 问题描述与需求分析

9.2.1 问题描述

贮木场制作者需制作顾客定做的家具，其每天只能制作5件家具。对于特定外来木材，已知运送成本为固定的5000元，贮存每个单位材料成本为10元。需要确定在两次运送期间，每次运送多少原材料以及每隔多长时间运送一次，能使两次运送期间及制作周期内平均每天成本最小。

9.2.2 需求分析

从数学角度，要将实际成本问题转化为函数问题，利用函数极值知识求解。从企业实际角

度，准确找到成本最小的运输和贮存策略，能避免因不合理的运输和贮存安排导致成本过高，影响企业利润，这就需要借助数学模型进行精确计算和分析。

9.3 问题建模与方法选择

9.3.1 问题建模

设 x 为运送周期（天数），因为每天制作 5 件家具，所以每次运送 $5x$ 单位材料，平均贮存量约为运送数量的一半即 $\frac{5x}{2}$ 。每个周期成本由运送成本 5000 元和贮存成本 $\frac{5x}{2} \times 10$ 组成，进而得到每天平均成本函数

$$C(x) = \frac{5000 + \frac{5x}{2} \times 10}{x} = \frac{5000}{x} + 25x \quad (x > 0),$$

将问题转化为求该一元函数在 $x > 0$ 时的最小值问题。

9.3.2 方法选择

利用求导的方法来寻找函数的极值点。对成本函数 $C(x)$ 求导，根据导数与函数单调性的关系，导数为 0 的点可能是极值点，再通过二阶导数判断该点是极大值点还是极小值点，进而确定函数的最小值。

9.4 模型求解与结果分析

9.4.1 求解过程

对 $C(x) = \frac{5000}{x} + 25x$ 求导，可得 $C'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25$ 。

令 $C'(x) = 0$ ，即 $-\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$ ，解得 $x = \pm 14.14$ ，因 $x > 0$ ，所以 $x = -14.14$ 舍去。

对 $C(x)$ 求二阶导数 $C''(x) = \frac{10000}{x^3}$ ，

当 $x = 14.14$ 时， $C''(14.14) = \frac{10000}{(14.14)^3} > 0$ ，故 $x = 14.14 \approx 14$ 是函数 $C(x)$ 的极小值点，也是最小值点。

所以，每次运送原材料数量为 $5 \times 14 = 70$ 单位材料。

9.4.2 结果分析

通过计算得出，贮木场制作者应每隔约 14 天运送一次外来木材，每次运送 70 单位材料，此时能使两次运送期间及制作周期内平均每天成本最小。这一结果为企业实际生产中的原材料运输和贮存安排提供了明确的指导，帮助企业在成本控制方面做出更科学的决策。

9.5 应用扩展与反思总结

9.5.1 应用扩展

这种成本优化模型可广泛应用于制造业、物流仓储业等多个行业。例如制造业中零部件的采购运输与库存管理，物流企业中货物的运输批次与仓储安排等，都可以通过类似的方法找到成本最小化的策略。

在供应链管理中，结合供应商的供货能力、运输距离等因素，进一步优化成本模型，实现整个供应链成本的降低。

9.5.2 反思总结

该模型假设运输成本固定且不随运输量和运输时间大幅变动，实际中可能存在运输价格波动、批量运输优惠等情况，会影响模型准确性。后续可考虑引入更复杂的成本函数，纳入这些可变因素。

模型未考虑原材料需求的不确定性，如订单突然增加或减少。在实际应用中，需要结合需求预测等方法，对模型进行动态调整，以适应市场变化。

案例10 离散型经济变量的价格模型

10.1 背景简介与应用目标

10.1.1 背景简介

在经济学领域，研究经济变量之间的关系以及其随时间的变化规律至关重要。离散型经济变量的价格模型常涉及到供给、需求与价格之间的动态联系，一阶差分方程作为一种有效的数学工具，能够刻画这种动态变化。

10.1.2 应用目标

通过建立和求解差分方程模型，明确商品价格在不同时期的变化规律，帮助企业制定合理的定价策略、预测市场趋势，也为政府进行宏观经济调控提供理论依据，如稳定物价、平衡供需等。

10.2 问题描述与需求分析

10.2.1 问题描述

已知商品在不同时期的供给函数 $S_t = -a + bP_t$ 、需求函数 $Q_t = m - nP_t$ ，以及价格 P_t 与 P_{t-1} 、 S_{t-1} 、 Q_{t-1} 的关系式 $P_t = P_{t-1} - k(S_{t-1} - Q_{t-1})$ ，需要求解供需相等时的均衡价格 \tilde{P} 以及商品价格随时间的变化规律 P_t 。

10.2.2 需求分析

从经济实际角度，企业和决策者需要了解市场价格的稳定状态（均衡价格）以及价格动态变化情况，以便合理安排生产、库存，制定营销策略等。从数学角度，要运用差分方程知识，将经济问题转化为数学模型求解。

10.3 问题建模与方法选择

10.3.1 问题建模

供需相等时, 令 $S_t = Q_t$, 即 $-a + bP_t = m - nP_t$, 构建方程求解均衡价格。
将供给、需求函数代入价格关系式

$$P_t = P_{t-1} - k(S_{t-1} - Q_{t-1}),$$

得到关于 P_t 和 P_{t-1} 的一阶常系数线性非齐次差分方程

$$P_t - (1 - bk - nk)P_{t-1} = k(a + m).$$

10.3.2 方法选择

对于求解均衡价格, 运用代数方程求解方法。对于差分方程, 先求对应的齐次方程的通解, 再通过设特解的方式求非齐次方程的特解, 最后得到非齐次方程的通解。

10.4 模型求解与结果分析

10.4.1 求解过程

均衡价格: 令 $S_t = Q_t$, 即 $-a + bP_t = m - nP_t$, 解得均衡价格 $\tilde{P} = \frac{a+m}{b+n}$ 。

10.4.2 价格变化规律

对应的齐次方程 $P_t - (1 - bk - nk)P_{t-1} = 0$, 其通解为 $P_t = C(1 - bk - nk)^t$ 。

设非齐次方程特解 $\tilde{P}^* = A$, 代入非齐次方程解得

$$A = \frac{k(a + m)}{1 - (1 - bk - nk)} = \frac{a + m}{b + n} = \tilde{P},$$

于是, 非齐次方程的通解为

$$P_t = C(1 - bk - nk)^t + \frac{a + m}{b + n}.$$

已知初始价格 P_0 , 由 $P_0 = C + \tilde{P}$ 得 $C = P_0 - \tilde{P}$, 最终得到

$$P_t = (P_0 - \tilde{P})(1 - bk - nk)^t + \tilde{P}.$$

10.4.3 结果分析

均衡价格 \tilde{P} 是市场供需平衡时的价格。价格随时间变化规律表达式中，当 $|1 - bk - nk| < 1$ 时，随着时间推移，价格 P_t 会逐渐趋近于均衡价格 \tilde{P} ，说明市场具有稳定性；当 $|1 - bk - nk| > 1$ 时，价格会远离均衡价格，市场不稳定。

10.5 应用扩展与反思总结

10.5.1 应用扩展

可应用于不同商品市场，如农产品、能源产品等，帮助企业预测价格走势，调整生产规模和库存策略。

拓展到宏观经济层面，分析通货膨胀、汇率等经济变量随时间的变化规律，为政策制定提供参考。

10.5.2 反思总结

模型假设供给和需求函数是线性的，实际市场中可能存在非线性关系，后续可研究非线性模型以更准确反映现实。

由于模型未考虑外部因素（如政策变动、突发事件）对市场的影响，未来可引入更多变量完善模型。

案例11 杆件形变问题分析案例

11.1 背景简介与应用目标

11.1.1 背景简介

在工程领域，杆件的轴向拉伸和轴的扭转是常见的基本变形形式。轴向拉伸变形常见于建筑结构中的拉杆、机械零件中的螺栓等；扭转变形则在传动轴、电机轴等部件中广泛存在。理解和量化这些变形对于保证工程结构和机械部件的正常运行与安全性至关重要。

11.2 应用目标

通过建立数学模型，精确描述杆件轴向拉伸的伸长量和轴扭转变形的扭转角，为工程设计和分析提供理论依据。帮助工程师在设计阶段合理选择材料、确定构件尺寸，确保结构和部件在受力时的变形处于安全范围内，避免因过度变形导致失效。

11.3 问题描述与需求分析

11.4 问题描述

需要对杆件在轴向拉力作用下的伸长量以及轴在扭矩作用下的扭转角进行精确的数学量化，即建立相应的数学模型并求解。已知杆件和轴的受力情况、几何尺寸变化等信息，要得出能准确反映变形量的函数关系。

11.5 需求分析

从工程实际角度，设计人员需要明确结构和部件在受力时的具体变形程度，以便进行强度

和刚度校核。从教学角度，有助于学生理解如何运用数学工具（如定积分）解决物理和工程领域的实际问题，培养学生的跨学科应用能力和工程思维。

11.6 问题建模与方法选择

11.7 问题建模

-轴向拉伸：对于非等直径杆件，考虑其直径沿长度方向的线性变化，建立横截面积 $A(x)$ 关于位置 x 的函数。结合胡克定律 $d(\Delta L) = \frac{Fdx}{EA(x)}$ （ F 为轴力， E 为弹性模量），确定微元段伸长量与各参数的关系。

扭转变形：对于有锥度的轴，确定微元段扭转角 $d\varphi$ 与扭矩 T 、剪切弹性模量 G 、微元段横截面对中心轴的面积二次矩 $J(x)$ 的关系，即 $d\varphi = \frac{Tdx}{GJ(x)}$ 。

11.8 方法选择

采用元素法，将杆件或轴分割成无数微小的单元段（微元），分析每个微元的受力与变形情况。然后利用定积分对所有微元的变形进行累加，从而得到整个杆件或轴的总变形量。

11.9 模型求解与结果分析

11.9.1 模型求解

轴向拉伸（非等直径杆件）：

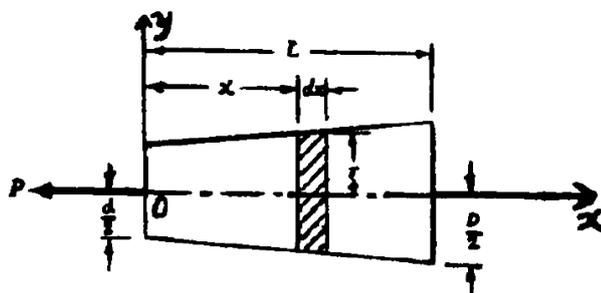


图11.1: 杆件形变问题

1. 确定横截面积函数：设杆件小端直径为 d ，大端直径为 D ，杆长为 L 。建立直角坐

标系，取 x 为积分变量，变化区间为 $[0, L]$ 。根据比例关系，可得 x 处横截面半径

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right),$$

则横截面积

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^2.$$

2. 计算微元段伸长量：根据胡克定律，厚度为 dx 的微元段在拉力 F 作用下的伸长量

$$d(\Delta L) = \frac{F dx}{EA(x)} = \frac{F dx}{E\pi \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^2}.$$

3. 计算总伸长量：对微元段伸长量在杆件全长上积分，可得总伸长量

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \int_0^L \frac{F dx}{E\pi \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^2},$$

令 $u = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right)$ ，则 $du = \frac{D-d}{2L} dx$ ，当 $x=0$ 时， $u = \frac{d}{2}$ ；当 $x=L$ 时， $u = \frac{D}{2}$ 。

原积分可化为

$$\Delta L = \frac{2FL}{E\pi(D-d)} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{du}{u^2}.$$

根据积分公式 $\int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$ ，可得

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{du}{u^2} = - \left[\frac{1}{u} \right]_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} = - \left(\frac{2}{D} - \frac{2}{d} \right) = \frac{2(d-D)}{Dd},$$

所以

$$\Delta L = \frac{2FL}{E\pi(D-d)} \cdot \frac{2(d-D)}{Dd} = \frac{4FL}{\pi d D E}.$$

扭转变形（有锥度的轴）：

1. 确定面积二次矩函数：对于圆形截面，面积二次矩 $J(x) = \frac{\pi}{2} r^4$ 。由前面轴向拉伸中 x 处横截面半径

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right),$$

可得

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^4.$$

2. 计算微元段扭转角：微元段在扭矩 T 作用下的扭转角

$$d\varphi = \frac{T dx}{GJ(x)} = \frac{T dx}{G \cdot \frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^4}.$$

3. 计算总扭转角：对微元段扭转角在轴全长上积分，可得总扭转角

$$\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{Tdx}{G \cdot \frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^4},$$

令 $v = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right)$ ，则 $dv = \frac{D-d}{2L} dx$ ，当 $x=0$ 时， $v = \frac{d}{2}$ ；当 $x=L$ 时， $v = \frac{D}{2}$ 。

原积分可化为

$$\varphi = \frac{2TL}{G\pi(D-d)} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dv}{v^4},$$

根据积分公式 $\int x^{-4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$ ，可得

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dv}{v^4} = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{v^3} \right]_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{8}{D^3} - \frac{8}{d^3} \right) = \frac{8(d^3 - D^3)}{3D^3d^3},$$

所以

$$\varphi = \frac{2TL}{G\pi(D-d)} \cdot \frac{8(d^3 - D^3)}{3D^3d^3} = \frac{32TL}{3G\pi(D-d)} \left(-\frac{1}{D^3} + \frac{1}{d^3} \right).$$

11.9.2 结果分析

轴向拉伸：得出的伸长量公式 $\Delta L = \frac{4FL}{\pi dDE}$ 表明，杆件的伸长量与轴力 F 、杆长 L 成正比，与弹性模量 E 、两端直径 d 和 D 成反比。这为设计受轴向拉力的杆件提供了量化依据，例如在设计时若要减小伸长量，可以选择弹性模量高的材料，或者增大杆件的横截面积（通过增大直径）。

扭转变形：扭转角公式 $\varphi = \frac{32TL}{3G\pi(D-d)} \left(-\frac{1}{D^3} + \frac{1}{d^3} \right)$ 说明，轴的扭转角与扭矩 T 、轴长 L 成正比，与剪切弹性模量 G 以及轴的几何尺寸（通过 D 和 d 体现）有关。在设计传动轴等部件时，可以根据这个公式来控制扭转变形，比如通过调整轴的直径尺寸或选择合适的材料（改变 G ）来满足扭转刚度要求。

11.10 应用扩展与反思总结

11.10.1 应用扩展

轴向拉伸：在建筑工程中，用于计算桥梁拉索、建筑支架拉杆等的伸长量，确保结构在受力时的变形不会影响其稳定性和安全性；在机械制造中，可用于设计螺栓、销钉等连接件，根据受力情况和允许变形量来确定其尺寸和材料。

扭转变形：在汽车工业中，用于设计传动轴、半轴等部件，保证动力传递过程中的扭转变形在合理范围内，避免因过度扭转导致部件损坏或传动失效；在机械加工领域，对于各类旋转轴的设计和分折，该模型可帮助工程师优化轴的结构和参数。

11.10.2 反思总结

上述模型基于一些简化假设，如材料均匀连续、小变形假设等。在实际工程中，材料可能存在缺陷、不均匀性，且变形可能超出小变形范围，这会导致模型计算结果与实际情况存在偏差。后续研究可考虑引入更复杂的本构关系和大变形理论，以提高模型的准确性和适用性。

模型仅考虑了单一的轴向拉伸或扭转变形情况，而实际工程结构和部件往往会同时承受多种载荷，发生组合变形。未来可进一步拓展研究，建立组合变形下的综合数学模型，更全面地描述结构和部件的力学行为。

案例12 导弹追踪及飞行轨迹问题应用案例

12.1 背景简介与应用目标

12.1.1 背景简介

在军事作战中，导弹追踪与命中目标是关键环节。随着现代战争的发展，精确打击和有效防御的需求促使对导弹飞行轨迹的研究愈发重要。从数学教学角度，导弹追踪问题是一个典型的实际应用案例，可用于讲解高阶微分方程等知识，体现数学在工程技术领域的强大应用能力。

12.1.2 应用目标

在军事方面，通过建立精确的数学模型求解导弹飞行轨迹，为导弹的发射控制、优化打击策略以及防空反导系统的部署提供理论依据。在教学方面，帮助学生掌握如何从实际问题中抽象出数学模型，运用数学方法解决复杂的工程问题，提升学生的数学应用能力和逻辑思维能力。

12.2 问题描述与需求分析

12.2.1 问题描述

已知导弹采用“尾追法”追踪空中目标，目标初始位置为 $(3,4)$ ，以 $200m/s$ 的速度沿 x 轴正向匀速飞行，导弹速度恒定为 $400m/s$ 。需要建立数学模型确定导弹在追踪过程中的飞行轨迹，该问题最终转化为求解关于导弹飞行轨迹函数 $y = f(x)$ 的高阶微分方程。

12.2.2 需求分析

军事上，准确掌握导弹飞行轨迹对于提高打击命中率、规避敌方防御以及实施有效的拦截

行动至关重要。在教学中，学生需要通过分析此类实际问题，理解数学建模的过程和方法，学会运用所学的数学知识（如微分方程）解决实际场景中的问题，培养理论联系实际的能力。

12.3 问题建模与方法选择

建立直角坐标系，设发射时刻 $t = 0$ 时，导弹位于坐标原点 $(0,0)$ ，空中目标位于点 $(3,4)$ 。以水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴建立平面直角坐标系。

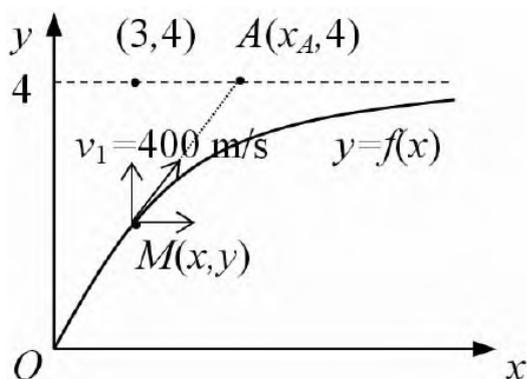


图12.2: 导弹追踪及飞行轨迹问题

根据几何关系建立方程：

(1) 切线斜率关系：记导弹在 t 时刻位于点 $M(x, y)$ ，空中目标在 t 时刻的位置坐标是 $(x_A, 4)$ 。因为目标初始位置是 $(3, 4)$ ，且飞行速度是 $200m/s$ ，所以 $x_A = 3 + 200t$ 。又因为导弹在飞行过程中始终指向空中目标，所以点 M 处的切线斜率等于 M 点和 A 点连线的斜率，即

$$\frac{4 - y}{3 + 200t - x} = \frac{dy}{dx},$$

此方程建立了导弹飞行轨迹的斜率与目标和导弹位置关系的联系。

(2) 速度分解关系：把导弹的速度进行分解，根据速度的合成与分解原理，两个沿坐标轴的分速度的平方和即为导弹速度的平方。已知导弹速度为 $400m/s$ ，所以

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 400^2,$$

该方程描述了导弹在 x 和 y 方向上速度分量与总速度的关系。

(3) 消去参数 t 得到微分方程：由

$$\frac{4 - y}{3 + 200t - x} = \frac{dy}{dx},$$

可得

$$200t = \frac{4-y}{\frac{dy}{dx}} + x - 3.$$

令 $p = \frac{dx}{dy}$ ，则 $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = p \frac{dy}{dt}$ ，代入 $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = 400^2$ ，可得

$$(\frac{dy}{dt})^2(1+p^2) = 400^2,$$

从而解出：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{400}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{dx}{dt} = p \frac{400}{\sqrt{1+p^2}}.$$

将 $200t = \frac{4-y}{p} + x - 3$ 两边对 y 求导，结合 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 的关系，经过一系列的求导、化简运算：

$$200 \frac{dt}{dy} = \frac{-p(4-y)'p + (4-y)p'}{p^2} + \frac{dx}{dy} - 0$$

$$200 \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{-p(-1)p + (4-y)\frac{dp}{dy}}{p^2} + p$$

$$200 \frac{\sqrt{1+p^2}}{400} = \frac{p^2 + (4-y)\frac{dp}{dy}}{p^2} + p$$

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{2} = \frac{p^2 + (4-y)\frac{dp}{dy}}{p^2} + p$$

$$\frac{p^2\sqrt{1+p^2}}{2} = p^2 + (4-y)\frac{dp}{dy} + p^3$$

$$(4-y)\frac{dp}{dy} = \frac{p^2\sqrt{1+p^2}}{2} - p^2 - p^3$$

$$(4-y)\frac{dp}{dy} = \frac{p^2(\sqrt{1+p^2} - 2 - 2p)}{2}$$

又因为 $\sqrt{1+p^2} \approx 1 + \frac{p^2}{2}$ （当 p 较小时的近似），代入上式并进一步化简可得

$$(4-y)\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2}(1+p^2),$$

即

$$\frac{d^2x}{dy^2}(4-y) = \frac{1}{2}[1 + (\frac{dx}{dy})^2],$$

这就是导弹运动轨迹满足的高阶微分方程。

12.3.1 方法选择

主要运用几何关系和物理中速度的合成与分解原理建立方程，通过对变量进行求导、代换、化简等代数运算，消去参数 t ，得到关于轨迹函数导数的微分方程。对于得到的可降阶高阶微分方程，后续采用降阶法进行求解。

12.4 模型求解与结果分析

12.4.1 模型求解

(1) 解方程：

令 $p = \frac{dx}{dy}$ ，则 $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{dp}{dy}$ ，则方程

$$\frac{d^2x}{dy^2}(4-y) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]$$

可化为

$$(4-y)\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2}(1+p^2).$$

分离变量并积分，得：

$$\int \frac{dp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{2(4-y)},$$

通过积分运算，得到了 p 与 y 的一个关系式

$$\arctan(p) = -\frac{1}{2}\ln|4-y| + C.$$

(2) 确定积分常数 C ：

由于当 $t = 0$ 时， $x = 0$ ， $y = 0$ ，代入 $\frac{4-y}{3+200t-x} = \frac{dy}{dx}$ ，可得 $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = \frac{4}{3}$ ，即 $p|_{(0,0)} = \frac{3}{4}$ 。将 $p = \frac{3}{4}$ ， $y = 0$ 代入上述等式，得

$$\arctan\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln(4) + C，解得 C = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln(4)。$$

从而求得

$$\frac{dx}{dy} = \tan\left(-\frac{1}{2}\ln|4-y| + \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln(4)\right).$$

(3) 积分求导弹的飞行轨迹方程：两边对 y 积分，得到

$$x = \int \tan\left(-\frac{1}{2}\ln|4-y| + \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln(4)\right) dy.$$

此即为导弹的飞行轨迹方程。

12.4.2 结果分析

通过求解得到的导弹飞行轨迹方程，能够精确描述导弹在追踪目标过程中的路径。从军事应用角度，可根据此轨迹优化导弹发射参数，例如调整发射角度、速度等，以提高打击精度；在防空反导方面，可依据来袭导弹的轨迹进行提前预判，合理部署拦截系统，确定拦截点和拦截时机。从教学角度，学生通过参与整个建模和求解过程，深入理解可降阶高阶微分方程的求解方法和实际应用价值，学会如何将实际问题转化为数学问题并进行求解，培养了数学建模能力和逻辑思维能力。同时，也让学生认识到数学在军事工程等实际领域中的重要性和广泛应用。

12.5 应用扩展与反思总结

12.5.1 应用扩展

军事领域拓展：在军事上，除了常规导弹追踪，还可用于研究巡航导弹在复杂地形和对抗环境下的轨迹规划，考虑地形约束、敌方干扰等因素对轨迹方程进行修正；对于反舰导弹，可结合目标舰艇的机动模型，建立更精准的追踪轨迹模型，提高对海上目标的打击能力。此外，在导弹防御系统中，可根据敌方导弹轨迹模型，优化拦截弹的发射策略，提高拦截成功率。

民用领域应用：在民用领域，类似的追踪问题可应用于无人机追踪目标。例如，在物流配送中，无人机追踪货物运输车辆或特定配送点，通过建立追踪轨迹模型，实现高效、精准的配送任务；在智能机器人领域，机器人追踪特定物体或目标人物，可用于安防监控、搜索救援等场景。通过建立数学模型确定运动轨迹，实现精准追踪和操作。在航空航天领域，卫星追踪目标飞行器或空间碎片，也可借鉴此类模型进行轨道规划和追踪控制。

12.5.2 反思总结

模型假设局限性：当前模型假设了目标匀速直线运动、导弹速度恒定以及“尾追法”等较为理想的情况。在实际中，目标可能会进行复杂的机动动作，如突然变速、变向、做规避动作等；导弹在飞行过程中也可能受到空气阻力、气象条件、自身动力系统变化等因素影响，导致速度并非严格恒定；而且“尾追法”在实际应用中可能会受到信号传输延迟、制导误差等因素干扰。后续可考虑建立更复杂、更符合实际的目标运动模型和导弹动力学模型，引入更多的变量和参数，如目标的加速度、导弹的变质量模型（考虑燃料消耗）等，使导弹轨迹计算更符合实际作战环境。

求解方法与计算精度：在求解过程中，部分积分计算复杂，虽然采用了一些常见的积分技巧和近似方法，但仍可能存在计算误差。可探索更简便、更精确的求解方法，例如利用数值计算方法（如龙格-库塔法等）结合计算机编程进行求解，既能提高计算效率，又能保证计算精度。同时，在教学中可引导学生思考不同求解方法的优缺点，培养学生的创新思维和问题解决能力，让学生了解在实际应用中如何根据具体问题选择合适的求解方法。

多学科融合：导弹追踪问题涉及到数学、物理学、控制工程、军事学等多个学科领域。在进一步研究中，应加强多学科的融合，综合考虑各学科因素对导弹轨迹的影响。例如，结合空气动力学知识考虑导弹飞行时的气动力对轨迹的影响；利用控制理论优化导弹的制导算法，使导弹能够更准确地追踪目标；从军事战略角度，考虑战场环境、敌方防御策略等因素对导弹轨迹规划的影响，从而建立更全面、更实用的导弹追踪模型。

案例13 攀岩问题应用案例

13.1 背景简介与应用目标

13.1.1 背景简介

随着全民健身热潮，攀岩运动日益流行。攀岩过程中，选择合适的起点和路线至关重要，这涉及到对地形高度变化的分析。从数学角度，可利用多元函数的方向导数和梯度等知识来研究攀岩难度相关问题。

13.1.2 应用目标

通过分析多元函数 $h(x, y)$ 的方向导数和梯度，帮助攀岩者确定在何处、朝什么方向攀岩难度最大，为攀岩者规划路线提供理论依据。同时，在教学中，可让学生理解多元函数相关概念在实际问题中的应用。

13.2 问题描述与需求分析

13.2.1 问题描述



图13.3: 小山丘实景图

已知小山丘底部所在平面为 xoy 平面，底部区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ ，高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ 。(1) 求解函数 $h(x, y)$ 在哪个方向上方向导数最大；

(2) 在 D 的边界上找一点 M 使 $h(x, y)$ 梯度的模达到最大。

13.2.2 需求分析

攀岩者需要明确从山脚下不同位置出发,朝哪个方向攀爬难度最大,以便选择更具挑战性的路线。通过解决此类问题,学生可掌握多元函数方向导数和梯度的计算及应用。

13.3 问题建模与方法选择

13.3.1 问题建模

对于方向导数,根据方向导数的定义和性质,函数在某点沿梯度方向的方向导数最大。所以先求出 $h(x, y)$ 的梯度 $\nabla h(x, y)$ 。

对于在区域 D 边界上找使梯度模最大的点,可利用拉格朗日乘数法,设边界方程为 $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0$, 构建拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = h(x, y) + \lambda g(x, y).$$

13.3.2 方法选择

运用多元函数求偏导数的方法计算梯度,再根据方向导数与梯度的关系求解方向导数最大的方向;利用拉格朗日乘数法求解在约束条件下函数的极值问题。

13.4 模型求解与结果分析

1. 求函数 $h(x, y)$ 方向导数最大的方向

求 $h(x, y)$ 的偏导数:

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial x} = -2x + y, \quad h_y = \frac{\partial h}{\partial y} = -2y + x.$$

则梯度 $\nabla h(x, y) = (h_x, h_y) = (-2x + y, -2y + x)$ 。

根据方向导数的性质,函数 $h(x, y)$ 在梯度 $\nabla h(x, y)$ 的方向上方向导数最大。

2. 在 D 的边界上找一点 M 使 $h(x, y)$ 梯度的模达到最大

(1) 构建拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = (-2x + y)^2 + (-2y + x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75)$$

这里求梯度的模的平方方便计算，因为模最大时平方也最大。

(2) 求偏导数并令其为0，得：

$$L_x = 2(-2x + y)(-2) + 2(-2y + x)(-1) + \lambda(2x - y) = 0$$

$$L_y = 2(-2x + y)(-1) + 2(-2y + x)(-2) + \lambda(2y - x) = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0$$

解得 $x = y = \pm 5\sqrt{3}$ ； $x = \pm 5$ ， $y = \mp 5$ 。

(2) 计算这些点处梯度的模：

当 $x = y = 5\sqrt{3}$ 时， $|\nabla h| = 5\sqrt{6}$ ； 当 $x = y = -5\sqrt{3}$ 时， $|\nabla h| = 5\sqrt{6}$ ；

当 $x = 5$ ， $y = -5$ 时， $|\nabla h| = 15\sqrt{2}$ ； 当 $x = -5$ ， $y = 5$ 时， $|\nabla h| = 15\sqrt{2}$ 。

比较可得，当 $x = \pm 5$ ， $y = \mp 5$ 时，梯度的模达到最大。

13.5 应用扩展与反思总结

13.5.1 应用扩展

在实际攀岩运动中，可结合地理信息系统（GIS），将地形高度数据转化为函数形式，利用上述方法为攀岩者规划更具挑战性的路线。

在山地建筑规划中，可利用类似方法分析地形坡度变化，合理布局建筑，减少施工难度和成本。

13.5.2 反思总结

此模型仅考虑了地形高度函数，实际攀岩中还需考虑岩石质地、摩擦力等因素，后续可进一步完善模型。

在教学中，可引导学生思考如何将更多实际因素纳入模型，培养学生解决复杂实际问题的能力。

案例14 电感电路中的电流计算案例

14.1 背景简介与应用目标

14.1.1 背景简介

在电路分析领域，电感元件是基本的电路元件之一。当电感线圈接入直流电压电路时，电流随时间的变化遵循一定规律。研究此类问题对于理解电路的动态特性至关重要，在电力系统、电子设备设计等诸多实际工程中都有广泛应用。

14.1.2 应用目标

通过建立数学模型求解 t 时刻电路中通过的电流 $i(t)$ ，帮助工程师和技术人员准确掌握电感电路在直流电压作用下的电流变化情况，从而合理设计电路参数，确保电路稳定运行。在教学中，可使学生深入理解电感电路的工作原理以及微分方程在电路分析中的应用。

14.2 问题描述与需求分析

14.2.1 问题描述

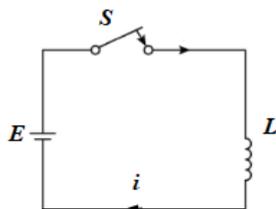


图14.4: 电感线圈电路

如图所示，在电感为 L 的电感线圈电路中加上直流电压 E ，在时刻 $t = 0$ 时闭合开关 S ，设 $t = 0$ 时，电感线圈中的磁通量为 $\varphi = 0$ ，试求 t 时刻电路中通过的电流 $i(t)$ 。

14.2.2 需求分析

从工程实际出发，电路设计者需要明确电感电路中电流的变化规律，以便选择合适的电源、电感等元件，避免电路在启动瞬间出现过大电流等问题。从教学角度，学生需要通过解决此类问题，掌握运用物理定律建立微分方程并求解的方法，提升理论联系实际的能力。

14.3 问题建模与方法选择

14.3.1 问题建模

根据电磁感应定律，电感两端的电压 $u = L \frac{di}{dt}$ 。

在直流电压 E 作用下，由基尔霍夫电压定律可知 $E = L \frac{di}{dt}$ ，这是一个一阶常微分方程，同时已知初始条件 $i(0) = 0$ （因为 $t = 0$ 时磁通量 $\varphi = 0$ ，根据 $\varphi = Li$ ，可得 $i = 0$ ）。

14.3.2 方法选择

采用分离变量法求解该一阶常微分方程。分离变量法是求解一阶常微分方程的常用方法，将含有 i 和 t 的项分别移到等式两边，然后进行积分运算。

14.4 模型求解与结果分析

14.4.1 模型求解

方程 $E = L \frac{di}{dt}$ 分离变量可得： $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$ ，即 $di = \frac{E}{L} dt$ 。

等式两边进行积分： $\int_0^i di = \int_0^t \frac{E}{L} dt$ 。左边积分得 $i - 0 = i$ ，右边积分得 $\frac{E}{L}t - 0 = \frac{E}{L}t$ 。
所以 $i(t) = \frac{E}{L}t$ 。

14.4.2 结果分析

得到的电流表达式 $i(t) = \frac{E}{L}t$ 表明，在直流电压作用下，电感电路中的电流随时间呈线性增长。这是因为电感具有阻碍电流变化的特性，在初始时刻电流为 0，随着时间推移，电流逐渐增大。该结果对于电路设计具有重要指导意义，例如在设计含有电感的滤波电路时，可根据此规律合理选择电感值和电源电压，以满足电路对电流变化速率的要求。同时，在教学中，学生通过求解此问题，深入理解了电感电路的动态特性以及微分方程在电路分析中的应用方法。

14.5 应用扩展与反思总结

14.5.1 应用扩展

在电力系统中，电感元件广泛应用于变压器、电抗器等设备。通过分析电流变化规律，可优化这些设备的设计，提高电力系统的稳定性和可靠性。例如，在设计电抗器时，可根据负载需求和系统参数，利用该模型合理选择电感值，抑制短路电流等。

在电子电路中，电感常用于振荡电路、电源滤波电路等。了解电感电路的电流变化规律，有助于设计高性能的电子设备，如在设计开关电源时，可精确控制电感中的电流变化，提高电源的转换效率和输出稳定性。

14.5.2 反思总结

此模型假设了理想的直流电压源和线性电感，实际电路中电源可能存在内阻，电感也可能存在非线性特性。后续可考虑将这些因素纳入模型，使分析更符合实际情况。例如，考虑电源内阻 R_0 时，基尔霍夫电压定律变为 $E = L \frac{di}{dt} + R_0 i$ ，这是一个一阶线性非齐次微分方程，求解方法会有所不同。

在教学中，可引导学生进一步探讨实际电路中各种因素对电流变化的影响，培养学生的创新思维和解决复杂问题的能力。同时，可通过实验验证理论模型，让学生更直观地感受电感电路的动态特性。

案例15 阻容电路方程应用案例

15.1 背景简介与应用目标

15.1.1 背景简介

在电路理论中， RC 串联电路是基础且重要的电路模型。电阻 R 、电容 C 以及电源 E 共同作用，使得电路中的电量、电流等物理量随时间变化。研究 RC 电路对于理解电路的暂态和稳态特性至关重要，在电子技术、通信工程等众多领域有着广泛应用，如滤波电路、振荡电路等。

15.1.2 应用目标

通过建立并求解 RC 回路中电量 q 满足的微分方程，能够准确掌握电路中电量随时间的变化规律。这有助于工程师在设计电路时，合理选择电阻、电容和电源参数，以满足电路的功能需求，例如实现特定的信号滤波、延时等功能。在教学中，可使学生深入理解电路理论和微分方程的实际应用，培养学生解决实际工程问题的能力。

15.2 问题描述与需求分析

15.2.1 问题描述

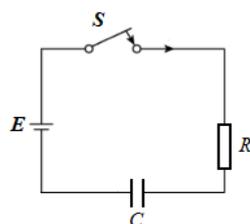


图15.5: 阻容串联电路

已知在如图所示的 RC 串联回路中，电源 $E = 60 \sin 30t \text{ V}$ ，电阻 $R = 100 \Omega$ ，电容 $C = 0.002 \text{ F}$ ，且电容上初始电量为 0，求电量 q 满足的微分方程，并求解。

15.2.2 需求分析

从工程实际角度，电路设计者需要明确电路中电量的变化情况，以便设计出性能优良的电路。从教学角度，学生需要通过解决此类问题，掌握如何运用电路基本定律建立微分方程，并运用数学方法求解，提升综合运用知识的能力。

15.3 问题建模与方法选择

15.3.1 问题建模

根据电路知识，电容两端的电压 $U_C = \frac{q}{C}$ ，电阻两端的电压 $U_R = Ri$ ，而电流 $i = \frac{dq}{dt}$ 。

由基尔霍夫电压定律可知，在 RC 串联回路中 $E = U_R + U_C$ ，将 $U_R = R \frac{dq}{dt}$ ， $U_C = \frac{q}{C}$ ， $E = 60 \sin 30t$ 代入可得： $60 \sin 30t = 100 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.002}$ ，整理后得到电量 q 满足的微分方程为：

$$100 \frac{dq}{dt} + 500q = 60 \sin 30t,$$

即 $\frac{dq}{dt} + 5q = 0.6 \sin 30t$ ，同时满足初始条件： $q(0) = 0$ 。

15.3.2 方法选择

这是一个一阶线性非齐次微分方程，采用常数变易法或利用一阶线性非齐次微分方程的通解公式来求解。

15.4 模型求解与结果分析

15.4.1 模型求解

(1) 求对应齐次方程的通解

将对应齐次方程 $\frac{dq}{dt} + 5q = 0$ 分离变量得： $\frac{dq}{q} = -5dt$ ，

两边积分： $\int \frac{dq}{q} = -\int 5dt$ ，得到： $\ln|q| = -5t + C_1$ ，

于是，得对应齐次方程的通解为： $q = Ce^{-5t}$ ($C = e^{C_1}$)。

(2) 常数变易法求非齐次方程的通解

设非齐次方程的解为 $q = C(t)e^{-5t}$ ，则 $\frac{dq}{dt} = C'(t)e^{-5t} - 5C(t)e^{-5t}$ 。

将 q 和 $\frac{dq}{dt}$ 代入原非齐次方程可得：

$$C'(t) = 0.6e^{5t} \sin 30t.$$

积分可得： $C(t) = \frac{0.6}{925}(5 \sin 30t - 30 \cos 30t)e^{5t} + C_2$ ，从而，原非齐次方程的通解为：

$$q = \frac{0.6}{925}(5 \sin 30t - 30 \cos 30t) + C_2 e^{-5t}.$$

(3) 求满足条件的特解

将初始条件 $q(0) = 0$ 代入通解可得： $0 = \frac{0.6}{5^2+30^2}(5 \times 0 - 30 \times 1) + C_2$ ，解得 $C_2 = \frac{18}{925}$ 。

于是，得到电量：

$$q(t) = \frac{0.6}{925}(5 \sin 30t - 30 \cos 30t) + \frac{18}{925}e^{-5t}.$$

15.4.2 结果分析

电量 $q(t)$ 的表达式由两部分组成，一部分是随时间按指数衰减的项 $\frac{18}{925}e^{-5t}$ ，这是暂态响应，随着时间推移会逐渐衰减至0；另一部分是与电源激励相关的正弦和余弦项 $\frac{0.6}{925}(5 \sin 30t - 30 \cos 30t)$ ，这是稳态响应，反映了电路在稳定状态下电量随电源激励的变化情况。该结果对于分析 RC 电路的动态特性具有重要意义，工程师可根据此结果调整电路参数，使电路满足特定的性能要求，例如通过改变电阻和电容值来调整暂态响应的衰减速度和稳态响应的幅度。

在教学中，学生通过求解过程深入理解了一阶线性非齐次微分方程在电路分析中的应用，以及电路暂态和稳态响应的概念。

15.5 应用扩展与反思总结

15.5.1 应用扩展

在电子电路设计中， RC 电路常用于滤波。通过调整 R 和 C 的值，可设计出低通、高通、带通等不同类型的滤波器，利用上述电量变化规律可精确分析滤波器对不同频率信号的响应，优化滤波器性能。例如在音频处理电路中，可设计 RC 低通滤波器去除高频噪声。

在信号处理领域， RC 电路可用于信号延时、积分和微分等操作。根据电量 $q(t)$ 的表达式，可准确控制信号的延时时间和处理效果，在通信系统中实现信号的预处理和调理。

15.5.2 反思总结

此模型假设了理想的电路元件，实际中电阻可能存在温度系数，电容可能存在漏电等非理想特性，这些因素会影响电路的性能和电量变化规律。后续可考虑建立更复杂的模型，纳入这些非理想因素，提高分析的准确性。

在教学中，可引导学生进一步探讨如何通过实验测量来验证理论模型，以及如何根据实际测量结果对模型进行修正和优化，培养学生的实践能力和科学思维。

案例16 放电电路研究应用案例

16.1 背景简介与应用目标

16.1.1 背景简介

在电路分析领域， LC 串联电路是常见的基础电路结构。电容充电后通过电感放电的过程涉及到电磁能量的转换与传递。研究此类电路有助于理解电路中的暂态过程、电磁振荡等现象，电子通信、电力系统等众多实际工程场景中有广泛应用，如信号滤波、振荡电路设计等。

16.1.2 应用目标

准确求出在电容放电过程中， t 时刻电容 C 上的电量 $q(t)$ 以及流过电路的电流 $i(t)$ ，从而深入了解 LC 串联电路放电过程的电气特性。

16.2 问题描述与需求分析

16.2.1 问题描述

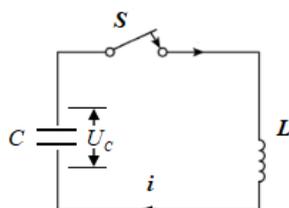


图16.6: LC 串联电路

如图所示，已知电容 C 充电到电压 E 后，在 $t = 0$ 时刻闭合开关 S 开始放电，确定在任意时刻 t ，电容电量及电路中的电流变化。

16.2.2 需求分析

为了精确描述电路的工作状态，需要建立合适的数学模型来求解电量 $q(t)$ 和电流 $i(t)$ 。这要求我们综合运用电路理论知识（如电感、电容的伏安特性）以及数学工具（常微分方程）。

16.3 问题建模与方法选择

16.3.1 问题建模

根据基尔霍夫电压定律（KVL），在 LC 串联电路中，电感上的电压 $L\frac{di}{dt}$ 与电容上的电压 U_C 之和为0，即 $L\frac{di}{dt} + U_C = 0$ ，且 $U_C = \frac{q}{C}$ 。

又因为电流 $i = \frac{dq}{dt}$ ，对其求导可得 $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ ，将其代入上述方程，得到 $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$ 。

设 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 为角频率，方程进一步化为下列二阶常系数线性齐次微分方：

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

16.3.2 方法选择

对于二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ （这里 $y = q$ ， $p = 0$ ， $q = \omega_0^2$ ），我们可以通过求解其特征方程来得到通解。其特征方程为 $r^2 + \omega_0^2 = 0$ 。

16.4 模型求解与结果分析

16.4.1 模型求解

(1) 求特征根：解特征方程 $r^2 + \omega_0^2 = 0$ 的特征根为： $r = \pm j\omega_0$ （其中 $j = \sqrt{-1}$ ）。

(2) 求通解：根据二阶常系数线性齐次微分方程的通解形式，当特征根为 $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ 时，通解为

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

于是，当 $\alpha = 0$ ， $\beta = \omega_0$ 时，电量 $q(t)$ 的通解为：

$$q(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

(3) 确定初始条件：在 $t = 0$ 时，电容充电到电压 E ，根据 $U_C = \frac{q}{C}$ ，可得 $q(0) = CE$ ；同时，在 $t = 0$ 时刻刚闭合开关，电流 $i(0) = 0$ ，即 $q'(0) = 0$ 。从而得到：

$$C_1 = CE, \quad C_2 \omega_0 = 0,$$

解出 $C_1 = CE$, $C_2 = 0$ 。

(4) 求出特解 $q(t)$ 和 $i(t)$: 将 $C_1 = CE$, $C_2 = 0$ 代入 $q(t)$, 得 t 时刻的电量为: $q(t) = CE \cos \omega_0 t$ 。于是, t 时刻的电流为:

$$i(t) = q'(t) = -CE\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

16.4.2 结果分析

电量 $q(t) = CE \cos \omega_0 t$ 表明电容上的电量随时间呈余弦规律变化, 在 $t = 0$ 时电量为初始值 CE , 随时间推移, 电量在正负值之间振荡, 反映了电容与电感之间不断进行的能量交换。

电流 $i(t) = -CE\omega_0 \sin \omega_0 t$ 表明电流随时间呈正弦规律变化, 且在 $t = 0$ 时电流为0, 之后电流也在正负值之间振荡, 与电量的变化相互关联, 体现了 LC 电路中电磁振荡的特性。

16.5 应用扩展与反思总结

16.5.1 应用扩展

该模型可用于设计振荡电路, 通过调整电感 L 和电容 C 的值来改变角频率 ω_0 , 从而产生特定频率的振荡信号, 应用于无线电通信中的信号发射与接收等方面。

在滤波电路设计中, 利用 LC 电路对不同频率信号的响应特性, 去除不需要的频率成分, 保留目标频率信号。

16.5.2 反思总结

建立模型过程中, 合理运用电路基本定律 (如 KVL) 和元件特性 (电感、电容伏安关系) 是关键, 将物理问题准确转化为数学方程。

求解常微分方程时, 特征方程法是解决此类问题的有效手段, 但要注意准确确定初始条件, 初始条件的正确获取依赖于对物理过程起始状态的清晰理解。

该模型是基于理想元件建立的, 实际电路中存在电阻等损耗因素, 可考虑将电阻纳入模型 (得到 RLC 电路模型), 使模型更贴近实际情况, 进一步提升对实际电路分析的准确性。

案例17 交流电路中的电功和平均功率应用案例

17.1 背景简介与应用目标

17.1.1 背景简介

在电力系统和电气设备领域，交流电是最常见的电能形式。了解交流电的平均功率对于评估电气设备的能量消耗、设计供电系统以及优化电力传输等方面具有重要意义。例如，在家庭用电中，各种电器的功率标注及实际能耗计算，都与交流电的平均功率相关；在工业生产中，大型电机等设备的功率分析也依赖于此。

17.1.2 应用目标

准确求出交流电在一个周期内的平均功率，以便更好地评估电器设备在使用交流电时的实际耗能情况，合理规划电力供应和使用，提高能源利用效率。

17.2 问题描述与需求分析

17.2.1 问题描述

已知交流电的表达式为 $I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ ，其中 I_m 是最大电流， ω 为角频率，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，求该交流电在一个周期内的平均功率。

17.2.2 需求分析

为了确定交流电在一个周期内实际做功的平均水平，需要根据交流电的电流表达式，结合功率的相关定义和计算方法，建立合适的数学模型进行求解。这要求我们综合运用三角函数知识以及积分运算来处理问题。

17.3 问题建模与方法选择

17.3.1 问题建模

对于纯电阻电路（这里先以纯电阻电路为例进行分析，因为纯电阻电路中电压与电流同相位），设电阻为 R ，根据欧姆定律，电压 $U(t) = I(t)R = I_m R \sin(\omega t + \varphi)$ 。

功率 $P(t) = U(t)I(t) = I_m^2 R \sin^2(\omega t + \varphi)$ 。

要求一个周期内的平均功率 \bar{P} ，根据平均函数值的定义：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2(\omega t + \varphi) dt.$$

17.3.2 方法选择

利用三角函数的恒等变换以及定积分运算来求解上述积分。先将 $\sin^2(\omega t + \varphi)$ 利用二倍角公式 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ 进行变换，然后对变换后的式子进行积分计算。

17.4 模型求解与结果分析

17.4.1 模型求解

由公式，可得交流电在一个周期内的平均功率为：

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{R I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{R I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt \\ &= \frac{R I_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi) dt \right] = \frac{R I_m^2}{2T} \left[T - \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) \Big|_0^T \right] \\ &= \frac{R I_m^2}{2} \quad (\text{其中 } T = 2\pi/\omega) \end{aligned}$$

17.4.2 结果分析

得到的平均功率 $\bar{P} = \frac{1}{2} I_m^2 R$ 表明，在纯电阻电路中，交流电的平均功率与最大电流的平方、电阻成正比。这意味着可以通过控制最大电流和电阻值来调节电路的平均功率消耗。例

如，在实际电路设计中，如果要降低功率消耗，可以适当减小电阻值（在满足设备正常工作要求的前提下）或者限制电流的最大值。

17.5 应用扩展与反思总结

17.5.1 应用扩展

在实际的电力传输中，考虑输电线路的电阻，根据上述平均功率公式可以评估输电过程中的功率损耗，从而优化输电电压、电流等参数，减少能量损失。

在电器设备的设计和选型中，依据平均功率公式可以准确计算设备的能耗，为节能型电器的研发和推广提供理论支持。比如设计低功耗的电子设备时，可以合理选择电阻元件和控制电流大小来降低平均功率。

17.5.2 反思总结

建立模型时，假设了纯电阻电路，实际电路中可能存在电感、电容等元件，这些元件会使电压和电流产生相位差，后续需要考虑更复杂的电路模型（如RLC电路）来更准确地分析交流电的功率情况。

在求解积分过程中，利用三角函数性质和换元积分法是关键步骤，要熟练掌握这些数学工具的运用。同时，对于不同形式的交流电表达式和电路参数，需要灵活调整计算方法和模型。

该平均功率的计算结果对于电力系统的规划、电气设备的运行管理等方面具有重要的指导意义，但实际应用中还需要综合考虑其他因素，如设备的发热、寿命等与功率相关的问题。

案例18 可变电阻器的调节案例

18.1 背景简介与应用目标

18.1.1 背景简介

在电路设计与电子工程领域，可变电阻器是常用的电子元件，用于调节电路中的电流、电压等参数。多个可变电阻并联组成的可变电阻器能提供更灵活的电阻调节范围。例如在电子实验中搭建分压电路、限流电路，或者在一些信号处理电路中调整信号的强度等，都需要精确调节电阻值。

18.1.2 应用目标

确定对 n 个阻值关系为 $R_1 < R_2 < \dots < R_n$ 的可变电阻进行逐个调节时，从粗调到微调的合理调节次序，以实现总电阻较为精确的调节，满足不同电路对电阻值的精确需求。

18.2 问题描述与需求分析

18.2.1 问题描述

由 n 个可变电阻并联成为一个可变电阻器，其中各个可变电阻的电阻值之间的大小关系为 $R_1 < R_2 < \dots < R_n$ ，要通过对各电阻进行逐个调节的方法达到对总电阻的调节，试问应通过怎样的调节次序从粗调到微调，以达到较精确的调节目标？

18.2.2 需求分析

为解决此问题，需要依据并联电阻的计算公式建立总电阻与各分电阻的关系模型，再通过分析各电阻变化对总电阻变化量的影响程度，来确定合理的调节次序。这要求我们熟练运用数学中的函数分析方法以及并联电阻的相关知识。

18.3 问题建模与方法选择

18.3.1 问题建模

对于 n 个电阻 R_1, R_2, \dots, R_n 并联, 根据并联电阻公式, 总电阻 R 满足:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n},$$

于是, 总电阻可表示为:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}.$$

两边关于 R_i 求偏导数, 得到:

$$\frac{\partial R}{\partial R_i} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)^2} \left(-\frac{1}{R_i^2}\right) = \left(\frac{R}{R_i}\right)^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

18.3.2 方法选择

分析 $\frac{\partial R}{\partial R_i}$ 的大小来判断 R_i 变化对总电阻 R 变化的影响程度。 $\frac{\partial R}{\partial R_i}$ 越大, 说明 R_i 相同的变化量会引起总电阻 R 更大的变化, 适合用于粗调; $\frac{\partial R}{\partial R_i}$ 越小, 适合用于微调。

18.4 模型求解与结果分析

18.4.1 模型求解

由于 $R_1 < R_2 < \dots < R_n$, 则 $\frac{\partial R}{\partial R_1} > \frac{\partial R}{\partial R_2} > \dots > \frac{\partial R}{\partial R_n}$,

所以调节次序应该是先调节 R_1 进行粗调, 因为 R_1 的变化对总电阻影响最大, 能快速改变总电阻到大致范围; 然后依次调节 R_2, R_3, \dots, R_{n-1} ; 最后调节 R_n 进行微调, 因为 R_n 的变化对总电阻影响最小, 可以实现对总电阻的精细调节。

18.4.2 结果分析

按照先调节 R_1 , 再依次调节 R_2, R_3, \dots, R_{n-1} , 最后调节 R_n 的次序, 能够实现从粗调到微调的过程。这样的调节方式可以在调节过程中, 先快速将总电阻调整到接近目标值的范围, 再逐步精细调整, 提高调节效率和精度。例如在实际电路调节中, 能更快更准确地达到所需的电阻值, 满足电路对电阻的精确要求。

18.5 应用扩展与反思总结

18.5.1 应用扩展

在电子设备的电源电路中，通过多个可变电阻并联调节电阻值，进而调整电源的输出电压和电流，满足不同负载的需求。按照上述调节次序，可以更精准地设置电源参数。

在传感器信号处理电路中，利用可变电阻并联调节电路的增益，通过合理的调节次序，可以精确调整传感器输出信号的放大倍数，提高信号的准确性和稳定性。

18.5.2 反思总结

建立模型时，假设了电阻的变化是微小的，实际调节过程中电阻可能会有较大幅度的变化，此时偏导数分析的准确性会受到一定影响。后续可以考虑建立更复杂的模型，综合考虑电阻较大变化时对总电阻的影响。

在实际应用中，还需要考虑电阻的精度、温度系数等因素对调节效果的影响。例如，不同精度的电阻在调节过程中可能会引入额外的误差，需要在选择电阻和调节过程中加以考虑和补偿。

该调节次序的确定方法对于多个电阻并联的情况具有一定的通用性，但对于其他复杂的电阻连接方式（如混联等）并不适用，需要进一步研究不同连接方式下的电阻调节策略。

案例19 运动信号追踪案例

19.1 背景简介与应用目标

19.1.1 背景简介

在实际的信号追踪场景中，例如雷达追踪移动目标、通信设备追踪信号源等情况，由于目标的移动以及信号传播等因素，追踪设备需要不断调整搜索方向。在平面空间（这里用 xoy 平面简化表示）中，其运动轨迹就可能呈现出类似题目中所描述的折线形。这种折线形路径反映了追踪过程中方向和距离的不断变化。

19.1.2 应用目标

通过建立数学模型来准确确定最终追到信号源时所在点的坐标，这对于实际的追踪系统至关重要。比如在军事领域可用于精确锁定敌方目标位置，在通信领域能帮助优化信号接收和定位，提高追踪效率和准确性。

19.2 问题描述与需求分析

19.2.1 问题描述

在追踪一个运动的信号源时，由于要不断地改变着搜索方向，所以在 xoy 平面内走出的路径为折线形图形：首先从点 O （记为 P_0 ）走到点 P_1 ， $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 x 正向夹角为 α ， $|\overrightarrow{P_0P_1}| = l$ ；再从 P_1 走到点 P_2 ， $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 夹角也为 α ，但 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_0P_1}|$ ；又从 P_2 走到点 P_3 ， $\overrightarrow{P_2P_3}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 夹角也为 α ，但 $|\overrightarrow{P_2P_3}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}|$ ， \dots ，按此规律一直追踪下去，最终追到了这个运动的信号源。试求最终追到这个运动信号源所在的点 P 的坐标。

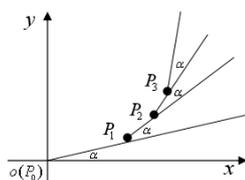


图19.7: 运动信号追踪

19.2.2 需求分析

需要运用合适的数学方法，结合向量的长度和角度信息，将折线形路径转化为可计算的数学模型，从而求解出点 P 的坐标。由于路径是无限延伸且有规律变化的，涉及到无穷级数的计算，需要找到有效的方法来处理。

19.3 问题建模与方法选择

19.3.1 问题建模

将每一段向量在 x 轴和 y 轴上进行分解。设从 P_{n-1} 到 P_n 的向量为 $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ ，其长度为 $L_n = l \times (\frac{1}{2})^{n-1}$ ，与 x 轴正向夹角为 $n\alpha$ 。那么在 x 轴方向上的分量

$$x_n = L_n \cos(n\alpha) = l \times (\frac{1}{2})^{n-1} \cos(n\alpha),$$

在 y 轴方向上的分量

$$y_n = L_n \sin(n\alpha) = l \times (\frac{1}{2})^{n-1} \sin(n\alpha).$$

点 P 的坐标 (x, y) 分别为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

19.3.2 方法选择

利用复数的指数形式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 构造复数级数来求解。通过构造复数级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} l \times (\frac{1}{2})^{n-1} e^{in\alpha}$ ，将 x 坐标对应复数级数的实部， y 坐标对应复数级数的虚部，再利用等比级数求和公式进行计算。

19.4 模型求解与结果分析

19.4.1 模型求解

构造复数级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} l \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{in\alpha}$$

这是首项 $a = le^{i\alpha}$ ，公比 $q = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ 的等比级数。因为 $|q| = |\frac{1}{2}e^{i\alpha}| = \frac{1}{2} < 1$ ，可得：

$$\begin{aligned} S &= \frac{le^{i\alpha}}{1 - \frac{1}{2}e^{i\alpha}} = \frac{l(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{1 - \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{2l(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} \\ &= \frac{2l(\cos\alpha + i\sin\alpha)(2 - (\cos\alpha - i\sin\alpha))}{(2 - (\cos\alpha + i\sin\alpha))(2 - (\cos\alpha - i\sin\alpha))} = \frac{2l(2\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + i(2\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha))}{4 - 2(\cos\alpha - i\sin\alpha) - 2(\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha)} \\ &= \frac{2l(2\cos\alpha - 1 + 2i\sin\alpha)}{4 - 4\cos\alpha + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \frac{2l(2\cos\alpha - 1 + 2i\sin\alpha)}{5 - 4\cos\alpha} \end{aligned}$$

横坐标 x 为 S 的实部，即 $x = \frac{2l(2\cos\alpha - 1)}{5 - 4\cos\alpha}$ ；纵坐标 y 为 S 的虚部，即 $y = \frac{4l\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$ 。

19.4.2 结果分析

得到的坐标表达式中，分母 $5 - 4\cos\alpha$ 始终不为零（因为 $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ ， $5 - 4\cos\alpha \geq 5 - 4 = 1$ ）。分子中的三角函数与角度 α 以及初始长度 l 相关，反映了路径的方向和起始条件对最终坐标的影响。当 $\alpha = 0$ 时， $x = \frac{2l(2-1)}{5-4} = 2l$ ， $y = 0$ ，符合在 x 轴上直线运动的预期；当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时， $x = \frac{2l(-1)}{5}$ ， $y = \frac{4l}{5}$ ，体现了垂直方向运动的特征。

19.5 应用扩展与反思总结

19.5.1 应用扩展

在机器人路径规划中，若机器人需要追踪一个移动目标且移动过程中不断调整方向，可利用此模型来规划机器人的最终位置和路径。

在天体观测中，追踪小行星等天体的运动轨迹，当观测设备不断调整角度和距离时，可通过类似模型确定天体最终被锁定时的位置。

19.5.2 反思总结

该模型的局限性在于它是基于平面且理想化的情况，实际应用中可能存在三维空间、环境干扰、信号误差等因素，需要进一步改进模型。

在求解过程中，复数级数的方法较为简洁有效，但对于更复杂的路径变化规律，可能需要寻找更合适的数学工具。后续可以研究如何将此模型与其他实际因素相结合，提高其通用性和准确性。

案例20 工程力学中的弯曲变形案例

20.1 背景简介与应用目标

20.1.1 背景简介

在工程结构力学领域，梁的变形分析是一个重要的研究内容。梁作为一种常见的结构构件，广泛应用于建筑、机械、航空航天等众多工程领域。例如在建筑结构中，梁用于承载楼板及其他结构传来的荷载；在机械制造中，梁可用于支撑和传递力。对梁的挠度（梁在受力后轴线的竖向位移）和转角（梁截面绕中性轴转动的角度）进行分析，能够帮助工程师了解梁在受力状态下的变形情况，从而评估结构的安全性和可靠性。

20.1.2 应用目标

通过对梁的挠度和转角进行精确计算，工程师可以在设计阶段优化梁的尺寸、材料选择以及支撑方式等参数，确保梁在实际使用过程中不会因变形过大而影响结构的正常使用功能。例如，在桥梁设计中，准确计算梁的挠度和转角可以避免桥面出现过大的起伏，保证行车的舒适性和安全性；在机械加工设备中，合理控制梁的变形能够提高加工精度。

20.2 问题描述与需求分析

20.2.1 实际问题描述

问题1 如图20.8所示的悬臂梁，一端固定，另一端自由。在自由端受到集中力 F 的作用，梁的抗弯刚度为 EI （ E 为材料的弹性模量， I 为截面的惯性矩，且 EI 为常数）。求该悬臂梁自由端的挠度及转角。

问题2 如图20.8所示的等截面简支梁，两端为铰支约束，承受均布荷载 q 作用，梁的抗弯刚度同样为 EI 。求梁的最大挠度以及 B 截面的转角。

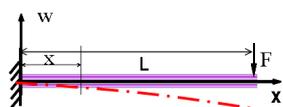


图20.8: 悬臂梁示意图

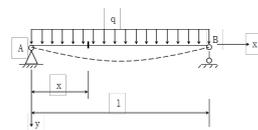


图20.9: 等截面简支梁示意图

20.2.2 需求分析

从力学角度来看, 梁的挠度和转角与梁所受的荷载、梁的长度、截面性质以及材料特性等因素密切相关。为了准确求解这些量, 我们需要运用材料力学中的相关理论, 如梁的挠曲线微分方程等。同时, 要充分考虑不同梁的边界条件(悬臂梁的一端固定、简支梁的两端铰支等), 这些边界条件将在求解过程中起到关键的约束作用。

20.3 问题建模与方法选择

20.3.1 问题1建模与方法

根据材料力学知识, 梁的挠曲线微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x),$$

其中 w 为挠度, x 为沿梁长度方向的坐标, $M(x)$ 为梁的弯矩方程。对于悬臂梁, 在集中力 F 作用下, 弯矩方程为:

$$M(x) = -F(L - x)$$

其中 L 为梁的长度。通过对挠曲线微分方程进行积分求解挠度 w 和转角 $\theta = \frac{dw}{dx}$, 再利用边界条件(固定端 $x = 0$ 处, $w = 0$ 且 $\theta = 0$) 确定积分常数。

20.3.2 问题2建模与方法

基于梁的挠曲线微分方程:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x).$$

对于承受均布荷载 q 的简支梁, 弯矩方程:

$$M(x) = \frac{q}{2}x(l - x)$$

其中 l 为梁的长度。通过对挠曲线微分方程进行两次积分得到挠度表达式, 再利用简支梁的边界条件($x = 0$ 和 $x = l$ 处, $w = 0$) 确定积分常数。为求最大挠度, 需要对挠度表达式求导, 令

导数为0找到极值点, 进而求出最大挠度; 对于B截面的转角, 可通过将 $x = l$ 代入转角表达式 (转角 $\theta = \frac{dw}{dx}$) 得到。

20.4 模型求解与结果分析

20.4.1 问题1模型求解

1. 已知 $EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x) = -F(L-x)$, 积分得:

$$EI \frac{dw}{dx} = \int -F(L-x)dx = -FLx + \frac{1}{2}Fx^2 + C_1$$

这里 $\frac{dw}{dx}$ 为转角 θ , 再积分得:

$$EIw = \int (-FLx + \frac{1}{2}Fx^2 + C_1)dx = -\frac{1}{2}FLx^2 + \frac{1}{6}Fx^3 + C_1x + C_2$$

2. 利用边界条件 $x = 0$ 时, $w = 0$, 代入 EIw 表达式可得: $C_2 = 0$ 。又 $x = 0$ 时, $\theta = 0$, 得: $C_1 = 0$ 。

于是得到悬臂梁的挠度和转角分别为

$$w = \frac{F}{6EI}x^3 - \frac{FL}{2EI}x^2, \quad \theta = \frac{dw}{dx} = \frac{F}{2EI}x^2 - \frac{FL}{EI}x$$

在自由端 $x = L$ 处, 挠度和和转角分别为

$$w_L = \frac{F}{6EI}L^3 - \frac{FL}{2EI}L^2 = -\frac{FL^3}{3EI}, \quad \theta_L = \frac{F}{2EI}L^2 - \frac{FL}{EI}L = -\frac{FL^2}{2EI}.$$

20.4.2 问题2模型求解

1. 对方程 $EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x) = \frac{q}{2}x(l-x) = \frac{q}{2}(lx-x^2)$ 积分得:

$$EI \frac{dw}{dx} = \int \frac{q}{2}(lx-x^2)dx = \frac{q}{2}(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3) + C_1$$

再次积分:

$$EIw = \int \left[\frac{q}{2}(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3) + C_1 \right] dx = \frac{q}{2}(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4) + C_1x + C_2$$

2. 由边界条件 $x = 0$ 时, $w = 0$; $x = l$ 时, $w = 0$, 可得: $C_2 = 0$, $C_1 = -\frac{ql^3}{24}$ 。

于是, 得到挠度和B截面的转角表达式为:

$$w = \frac{q}{24EI}(x^4 - 2lx^3 + l^3x), \quad \theta = \frac{dw}{dx} = \frac{q}{24EI}(4x^3 - 6lx^2 + l^3).$$

令 $\frac{dw}{dx} = 0$ ，得符合条件的驻点 $x = \frac{l}{2}$ 。

将 $x = \frac{l}{2}$ 代入挠度表达式可得最大挠度：

$$w_{max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

将 $x = l$ 代入 B 截面的转角公式，可得：

$$\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

20.4.3 结果分析

对于问题1，悬臂梁自由端的挠度和转角与集中力 F 、梁的长度 L 以及抗弯刚度 EI 相关。挠度 w_L 与 L^3 成正比，说明梁长度对挠度影响较大；转角 θ_L 与 L^2 成正比。对于问题2，简支梁的最大挠度 w_{max} 与均布荷载 q 、梁长度 l 的四次方成正比，与抗弯刚度 EI 成反比； B 截面转角 θ_B 与 q 、 l^3 成正比，与 EI 成反比。这些结果符合工程力学中对梁变形的一般认知，并且可以为实际工程设计提供理论依据，例如在设计梁时可根据允许的变形量来选择合适的材料和尺寸。

20.5 应用扩展与反思总结

20.5.1 应用扩展

在建筑结构设计，对于不同类型的梁（如连续梁、伸臂梁等），可以采用类似的方法结合其特殊的边界条件和荷载形式来分析挠度和转角，从而优化梁的设计，确保建筑物的安全性和适用性。

在机械工程中，许多零部件（如机床的导轨、机械臂等）可以简化为梁的模型进行分析。通过精确计算挠度和转角，可以提高机械系统的精度和稳定性，例如在精密加工设备中，减少梁的变形可以提高加工精度。

在航空航天领域，飞行器的机翼、机身等结构部件也可看作梁结构。对其挠度和转角的分析有助于优化飞行器的结构设计，提高飞行性能和安全性。

20.5.2 反思总结

上述模型是基于材料力学中的小变形假设和线弹性假设建立的，在实际工程中，当梁的变形较大或者材料进入非线性阶段时，该模型不再适用，需要考虑非线性力学理论进行修正。

模型中忽略了一些实际因素，如梁的自重、温度变化对梁变形的影响等。在一些对精度要求较高的工程中，需要进一步完善模型，考虑这些因素的作用。

在求解过程中，主要运用了积分运算和边界条件确定积分常数的方法。对于更复杂的梁结构和荷载形式，可能需要借助数值计算方法（如有限元法）来求解，以提高计算效率和精度。未来可以进一步研究如何将理论模型与数值方法更好地结合，拓展梁变形分析的应用范围。

案例21 游戏中导数与微分方程的应用案例

21.1 背景简介与应用目标

21.1.1 背景简介

在现代电子游戏领域，角色的能量系统是至关重要的组成部分。玩家操控角色在游戏环境中展开各类活动，能量的动态变化对角色的能力以及整体游戏体验起着决定性作用。比如在冒险类游戏里，角色施展特殊技能、实现快速移动等操作往往需消耗能量；而在战斗类游戏中，能量可用于发动强力攻击。能量的获取与恢复机制为游戏增添了策略性与趣味性。本题中，角色能量随时间的变化由一个融合三角函数与对数函数的复合函数给定，同时还存在特定的能量恢复机制常微分方程，这些设定促使游戏的能量系统更趋复杂且贴近实际游戏状况。

21.1.2 应用目标

对于游戏开发者而言，精准把握并精心设计角色能量变化率以及能量恢复机制，能够有效平衡游戏的难度与趣味性。通过合理调配相关参数，可引导玩家的游戏行为，诸如决定何时收集星星以补充能量，以及在缺乏星星收集的情况下如何规划角色行动以等待能量自然恢复。对玩家来说，明晰能量变化规律有助于制定更为有效的游戏策略，进而提升游戏表现。

21.2 问题描述与需求分析

21.2.1 问题描述

在游戏中，玩家操控角色的能量由 $E(t) = A \sin(Bt) + C \ln(Dt + E)$ 确定，其中 A, B, C, D, E 为正常数， t 代表游戏内时间（单位：分钟）。试解决以下问题：

(1) 构建角色能量变化率 $R(t)$ （即能量关于时间的导数）与时间的函数关系，并阐释其在游戏设计中的意义；

(2) 计算当 $t = 10$ 分钟时的能量变化率 $R(t)$;

(3) 求解游戏中角色能量恢复机制所遵循的常微分方程 $\frac{dE}{dt} = k\sqrt{E(t)}$, 给出通解并说明其对游戏中角色能量恢复策略的影响。

21.2.2 需求分析

从数学层面剖析, 第一个问题需运用求导公式对复合函数求导, 以获取能量变化率函数; 第二个问题是在第一个问题的基础上, 将特定时间值代入能量变化率函数进行运算; 第三个问题则要运用常微分方程的求解方法得出能量随时间恢复的通解。在游戏设计方面, 能量变化率反映了能量在不同时刻的增减速率, 对玩家决策以及游戏节奏把控具有重要意义; 能量恢复机制的通解可助力开发者与玩家洞悉在无额外能量获取时能量的自然恢复模式, 进而制定合理的游戏策略。

21.3 问题建模与方法选择

21.3.1 建模与方法

第(1)问: 依据导数的物理含义, 能量变化率 $R(t)$ 实则为能量函数 $E(t)$ 对时间 t 的导数。对于函数 $E(t) = A \sin(Bt) + C \ln(Dt + E)$, 运用求导基本公式以及复合函数求导法则来求 $R(t)$ 。

第(2)问: 在获取问题1中能量变化率函数 $R(t)$ 后, 将 $t = 10$ 代入 $R(t)$, 依照函数求值的方法进行计算。

第(3)问: 方程 $\frac{dE}{dt} = k\sqrt{E(t)}$ 为可分离变量的常微分方程。可采用分离变量法, 将含有 E 和 t 的项分别移至等式两边, 两边积分求通解。

21.4 模型求解与结果分析

21.4.1 模型求解

(1) 能量变化率函数

$$R(t) = E'(t) = A \cos(Bt) \cdot B + \frac{C \cdot D}{Dt + E} = AB \cos(Bt) + \frac{CD}{Dt + E}.$$

在游戏设计中, $R(t)$ 表示角色能量在时刻 t 的变化速率。当 $R(t) > 0$ 时, 角色能量在增加, 可能是因为玩家收集星星等操作; 当 $R(t) < 0$ 时, 角色能量在减少, 可能是角色进行了消耗能量的

行为。开发者可以通过调整 A, B, C, D, E 这些参数来控制能量变化的快慢和节奏，影响玩家的游戏体验。

(2) 当 $t = 10$ 时，将其代入 $R(t)$ ，得：

$$R(10) = AB \cos(10B) + \frac{CD}{10D + E}.$$

(3) 常微分方程 $\frac{dE}{dt} = k\sqrt{E}$ ，分离变量：

$$\frac{dE}{\sqrt{E}} = kdt$$

两边同时积分：

$$\int \frac{dE}{\sqrt{E}} = \int kdt$$

得到通解：

$$E(t) = \frac{(kt + C_1)^2}{4}.$$

在游戏中，这个通解表示在没有收集星星时角色能量的自然恢复模式。常数 k 决定了能量恢复的速度， C_1 由初始能量值等因素决定。玩家可以根据这个恢复模式，在能量较低时选择合适的策略，例如寻找安全区域等待能量恢复，或者冒险去收集星星以快速补充能量。开发者也可以通过调整 k 值来平衡游戏难度， k 值大则能量恢复快，游戏相对容易； k 值小则能量恢复慢，游戏难度增加。

21.5 应用扩展与反思总结

21.5.1 应用扩展

游戏平衡调整：除了当前的能量函数和恢复机制，开发者可以进一步引入更多因素，如不同场景下能量变化率的调整（在危险区域能量消耗加快等），或者根据玩家等级改变能量恢复速度，从而实现更精细的游戏平衡。

多角色系统：在多人游戏或有多个可操控角色的游戏中，每个角色可以有不同的能量函数和恢复机制，增加游戏的策略多样性和趣味性。

与游戏剧情结合：能量变化和恢复机制可以与游戏剧情紧密结合，例如在特定剧情节点能量恢复速度大幅提升或降低，增强游戏的故事性和沉浸感。

21.5.2 反思总结

模型局限性：当前模型假设能量函数和恢复机制相对简单和稳定，但在实际游戏中，可能存在随机事件、突发事件等影响能量变化，模型需要进一步扩展以考虑这些不确定性因素。

参数敏感性：游戏中各个参数（如 A, B, C, D, E, k 等）对游戏体验影响较大，需要通过大量测试和玩家反馈来精细调整这些参数，确保游戏的可玩性和平衡性。

跨学科融合：游戏中的能量系统涉及数学建模、心理学（影响玩家决策和体验）、计算机科学（实现游戏机制）等多个学科领域，未来需要进一步加强跨学科的研究和合作，以创造更优秀的游戏体验。

案例22 放射性物质泄漏研究案例

22.1 背景简介与应用目标

22.1.1 背景简介

放射性物质泄漏事件在现实中会对环境与人类健康构成严重威胁。诸如核设施事故、放射性医疗材料意外泄漏等情形，均要求相关部门迅速采取应对举措进行处理与评估。本案例中，环保局受委托对放射性碘物质泄漏事件展开调查，明晰辐射水平的衰减状况，对于保障当地居民安全、指导撤离行动以及后续的环境修复工作而言至关重要。

22.1.2 应用目标

通过对辐射水平衰减模型进行分析与计算，确定辐射水平降至可接受程度所需的时长，为居民安全返回提供依据；同时计算降低到可接受水平时泄漏的放射物总量，有助于评估事件的危害程度，为后续的清理和防护工作提供数据支撑。

22.2 问题描述与需求分析

22.2.1 问题描述

环保局近日受托对一起放射性碘物质泄漏事件进行调查，检测结果显示，出事当日，大气辐射水平是可接受的最大限度的四倍，于是环保局下令当地居民立即撤离这一地区，已知碘物质放射源的辐射水平是按下式衰减的：

$$R(t) = R_0 e^{-0.004t},$$

其中 R 是 t 时刻的辐射水平（单位： mR/h ）， R_0 是初始（ $t = 0$ ）时的辐射水平，时间 t 按小时计算，试求：

(1) 该地降低到可接受的辐射水平需要多长时间?

(2) 假设可接受辐射水平的最大限度为 0.6 mR/h , 那么降低到这一水平时已经泄漏出去的放射物的总量是多少? (mR :毫伦琴)

22.2.2 需求分析

从数学层面来讲, 第一问需要借助指数函数的性质以及对数运算, 依据已知的辐射衰减公式构建方程来求解时间 t 。第二问则需运用定积分知识, 对辐射强度函数在从初始时刻到降低到可接受水平时刻的这个时间段上进行积分, 进而得到泄漏的放射物总量。在实际应用方面, 精确计算这两个量, 对于应急响应以及后续处理工作的决策制定具有重要意义。

22.3 问题建模与方法选择

(1) 设可接受的辐射水平为 R_1 , 已知出事当日辐射水平 $R(0) = 4R_1$, 即 $R_0 = 4R_1$ 。要确定辐射水平降低到 R_1 所需的时间 t , 将 $R(t) = R_1$, $R_0 = 4R_1$ 代入辐射衰减公式, 通过求解代数方程关于 t 的方程得出时间。

(2) 依据物理学知识, 放射物总量可通过对辐射强度函数在时间区间上进行积分得到。已知辐射强度函数 $R(t) = R_0 e^{-0.004t}$, 可接受辐射水平为 0.6 mR/h , 先依据问题1求出此时对应的时间 t_0 , 然后在区间 $[0, t_0]$ 上定积分求出放射物总量

$$Q = \int_0^{t_0} R_0 e^{-0.004t} dt.$$

22.4 模型求解与结果分析

(1) 设可接受的辐射水平为 R_1 , 已知 $R_0 = 4R_1$, 当 $R(t) = R_1$ 时, 得到:

$$R_1 = 4R_1 e^{-0.004t}$$

因 $R_1 \neq 0$, 两边同时除以 R_1 , 得到: $1 = 4e^{-0.004t}$, 解方程, 得该地降低到可接受的辐射水平所需要的时间为

$$t = \frac{\ln 4}{0.004} = \frac{2 \ln 2}{0.004} = 500 \ln 2 = 346.5 \quad (h).$$

(2) 已知可接受的辐射水平的最大限度为 0.6 mR/h , 则初始辐射水平 $R_0 = 4 \times 0.6 = 2.4 \text{ mR/h}$ 。由 (1) 的计算结果可知, 降低到 0.6 mR/h 所需时间 $t = 500 \ln 2$ 小时。从而, 放

射物总量 Q 为

$$Q = \int_0^{500 \ln 2} 2.4e^{-0.004t} dt = 2.4 \int_0^{500 \ln 2} e^{-0.004t} dt = 2.4 \times \left(-\frac{1}{0.004} e^{-0.004t} \right) \Big|_0^{500 \ln 2} = 450(mR)$$

22.4.1 结果分析

对于问题(1), 计算结果表明辐射水平降低到可接受程度需要346.5小时, 约为14.44天。这表明居民在大约14.44天内不能返回该地区, 相关部门需要在这段时间内做好居民安置和环境监测等工作。对于问题(2), 计算得出降低到可接受水平时已经泄漏出去的放射物总量为450mR, 这一数据能够帮助评估事件的严重程度, 为后续的清理和防护措施提供量化依据。

22.5 应用扩展与反思总结

22.5.1 应用扩展

其他放射性物质泄漏: 类似的分析方法可应用于其他放射性物质泄漏事件, 如放射性铯、钡等物质的泄漏, 只需依据不同物质的辐射衰减特性调整相应的衰减公式参数即可。

环境监测与预警系统: 可将辐射衰减模型与环境监测数据相结合, 构建更完善的预警系统。通过实时监测辐射水平, 利用模型预测辐射水平变化趋势, 提前采取措施保障公众安全。

核设施退役与清理: 在核设施退役过程中, 同样会涉及到放射性物质的处理以及辐射水平的控制。本题的方法可用于评估退役过程中辐射水平的变化以及计算放射物总量, 指导退役和清理工作的开展。

22.5.2 反思总结

模型假设的局限性: 本题模型假定辐射水平仅按照给定的指数函数衰减, 而实际情况中可能受到多种因素影响, 如气象条件(风向、降雨等)对放射性物质扩散和衰减的影响, 模型需要进一步考虑这些复杂因素以提升准确性。

数据准确性的重要性: 模型计算依赖于初始辐射水平、可接受辐射水平等数据的准确性。在实际应用中, 需确保这些数据的测量和确定具备足够的精度, 否则可能导致计算结果偏差较大, 影响决策制定。

多学科融合的需求: 处理放射性物质泄漏问题涉及物理学、数学、环境科学、公共卫生等多个学科领域。未来需要加强多学科的合作与交流, 综合运用各学科知识, 提升应对此类事件的能力。

案例23 船舶设计中船体表面承载能力的计算

23.1 背景简介与应用目标

23.1.1 背景简介

船舶设计需保障航行安全，核心是让船体在水中既不沉没，也能保持平衡。而船体与水接触的表面受水压力作用，压力的分布和总效应直接影响浮力与重心（浮心）位置，这两个因素是船舶安全的关键。

23.1.2 应用目标

通过数学方法计算船体表面的总压力，进而确定船体的浮力和重心位置，评估船体承载能力，规避沉没或失衡的风险。

23.2 问题描述与需求分析

23.2.1 问题描述

船体表面是曲面，水对曲面各点的压力因深度等因素不同（压力随深度增加而增大），计算整个曲面受到的总压力，并对浮力和重心位置进行分析。

23.2.2 需求分析

需要一种能处理“曲面域上的分布力求和”的数学工具，因为常规的“有限个力相加”无法应对连续曲面的无限个压力元，必须用积分（曲面积分）来实现“连续量的累加”。

23.3 问题建模与方法选择

23.3.1 问题建模

设水的密度为 ρ ，重力加速度为 g ，船体表面某点的深度为 h ，则该点的水压力为 $p = \rho gh$ （流体静压力公式）。

取船体表面的微小曲面元 dS ，该曲面元受到的压力微元为 $dF = p \cdot dS = \rho gh \cdot dS$ 。

整个船体表面的总压力为 $F = \iint_S \rho gh \, dS$ （第一类曲面积分，用于计算“被积函数在曲面上的累加”）。

23.3.2 方法选择

选择曲面积分作为核心方法。因为船体表面是连续曲面，压力是曲面上的连续分布量，曲面积分能精确描述“无限个压力微元在曲面上的累加”，实现从“点压力”到“总压力”的计算。

23.4 模型求解与结果分析

23.4.1 模型求解

需结合船体的具体形状（曲面 S 的方程）、各点深度 h 与曲面元 dS 的关系，将曲面积分 $F = \iint_S \rho gh \, dS$ 转化为具体的三重积分（或利用曲面的参数方程转化为二重积分）进行计算。例如，若船体表面用参数方程 $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示，可通过参数化方法将曲面积分转化为参数 u, v 域上的二重积分求解。

23.4.2 结果分析

总压力 F 的大小直接关联浮力：根据阿基米德原理，浮力等于排开液体的重量，而从流体静力学角度，船体表面总压力的竖直分量的合力即为浮力（水平分量相互抵消）。

总压力的分布还能进一步分析重心（浮心）位置：通过对压力分布的矩积分（结合曲面积分计算力矩），可确定浮心坐标，浮心与重心的相对位置决定了船舶的平衡稳定性。

23.5 应用扩展与反思总结

23.5.1 应用扩展

曲面积分的应用可拓展到更复杂的流体环境（如非均匀流体、有流动的流体），此时压力分布不仅与深度有关，还与流速等因素相关，需修正压力公式并重新建模积分。

除了船体，类似的“曲面受力分析”在航空（机翼表面空气压力积分）、水利（坝体曲面的水压力积分）等工程领域也有广泛应用。

23.5.2 反思总结

曲面积分是连接“连续分布的物理量”与“总效应”的关键数学工具，体现了高等数学对工程问题“从微观到宏观”的量化能力。

该案例也反映了“数学建模与工程需求的结合”：工程中“总压力、浮力、重心”的需求，驱动了“曲面积分”这一数学方法的应用，验证了数学与工程的互促关系。

案例24 电磁学中计算电通量和磁通量的应用

24.1 背景简介与应用目标

24.1.1 背景简介

电磁学研究电场、磁场的分布与相互作用，而“通量”是描述场（电场、磁场）穿过某一曲面的“总量”的核心物理量。在工程领域（如电磁屏蔽、电子器件设计），需精确掌握电场/磁场穿过特定曲面的通量，以指导技术方案设计。

24.1.2 应用目标

利用数学工具（曲面积分）计算穿过曲面的电通量或磁通量，进而分析电场、磁场的分布规律，为电磁相关工程（如电磁屏蔽材料设计、高频电路布局）提供理论依据。

24.2 问题描述与需求分析

24.2.1 问题描述

电场（或磁场）是空间中的矢量场，其大小和方向随位置变化。需计算“电场（或磁场）穿过某一曲面的总量”（即电通量或磁通量），但场是连续分布的，无法用“有限个矢量相加”描述总量。

24.2.2 需求分析

需要一种能处理“矢量场在曲面上的累积效应”的数学方法，曲面积分（尤其是矢量场的曲面积分）可实现“无限个场矢量在曲面上的累加”，从而量化通量。

24.3 问题建模与方法选择

24.3.1 问题建模

电通量：设电场强度为矢量 \vec{E} ，曲面的微小面元为矢量 $d\vec{S}$ （大小为 dS ，方向为面元的法向），则穿过 $d\vec{S}$ 的电通量微元为 $d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ （点积，描述 \vec{E} 沿法向的分量与面元的乘积）。

整个曲面 S 的电通量为 $\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 。

磁通量：类似地，磁场强度为 \vec{B} 时，磁通量 $\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 。

高斯定理（电场特例）：对于闭合曲面 S ，电通量与曲面内电荷量 Q 满足 $\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ （ ϵ_0 为真空介电常数），将“曲面积分计算通量”与“电荷的场源作用”关联。

24.3.2 方法选择

选择矢量场的曲面积分（第二类曲面积分）。因为电场、磁场是矢量场，通量需考虑场矢量与曲面法向的“投影关系”（点积的物理意义），曲面积分能精确描述“矢量场沿曲面法向的分量在面上的累加”。

24.4 模型求解与结果分析

24.4.1 模型求解

以高斯定理为例，若已知闭合曲面内的电荷量 Q ，可直接利用 $\Phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 得到电通量；若需从电场分布 $\vec{E}(x, y, z)$ 计算，则需将曲面 S 参数化（如用直角坐标、柱坐标或球坐标），把曲面积分 $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 转化为三重积分（利用高斯公式，将曲面积分转化为体积分）或直接对曲面的参数方程进行积分计算。

24.4.2 结果分析

电通量结果：若 Φ_e 大，说明穿过曲面的电场“总量”大，反映电场在该区域的“穿透性”强；结合高斯定理，还能反推曲面内电荷的分布（若已知 Φ_e ，可求 Q ）。

工程意义：在电磁屏蔽设计中，若某材料表面的电通量小，说明电场“穿透”材料的量少，屏蔽效果好，可据此优化屏蔽材料的结构或材质。

24.5 应用扩展与反思总结

24.5.1 应用扩展

磁通量的应用：在变压器、发电机等电磁感应设备中，磁通量的变化是产生感应电动势的核心（法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ ），通过曲面积分计算磁通量，可指导设备的电磁线圈设计。

非闭合曲面的通量：如天线接收信号时，需计算电磁波（电场、磁场）穿过天线“接收面”的通量，以评估天线的接收效率，此时曲面积分同样是核心计算工具。

24.5.2 反思总结

数学工具的价值：曲面积分是连接“电磁学矢量场理论”与“工程中通量化需求”的桥梁，体现了高等数学对物理规律的“量化描述能力”。

学科融合的意义：电磁学的“通量”概念依赖曲面积分才能精确计算，反映了数学与物理（电磁学）的深度融合，也为工程应用（如电磁设备、电磁防护）提供了理论计算的基石。

案例25 低通RC 滤波电路应用案例

25.1 背景简介与应用目标

25.1.1 背景简介

在电子信息工程领域，电信号是信息传输与处理的核心载体，小到手机充电器、蓝牙耳机，大到工业传感器、医疗设备，均需对电信号进行精准调控。然而，实际应用场景中，信号极易受到干扰：例如电网供电会引入1kHz以上的高频噪声，电子元件振动会产生100-1000Hz的杂波，这些干扰会导致信号失真——如充电器输出电压波动超过0.1V会缩短手机电池寿命，传感器采集的温度信号混入高频杂波会使测量误差扩大10%以上。传统滤波方案（如电感滤波）存在体积大、成本高、不易集成的问题，低通RC滤波电路因结构简单（仅由电阻 R 和电容 C 组成）、成本低廉、易于集成，成为消费电子、工业控制等领域解决高频干扰的主流方案。其核心原理是利用电容“通交流、隔直流，通高频、阻低频”的特性，实现“允许低频信号通过，阻碍高频信号”的功能，例如在手机充电器中，可将220V交流电经整流后的脉动直流信号（含低频有用信号与高频干扰）处理为平稳的直流电压（仅保留低频有用成分）。要实现这一功能，需通过数学知识建立输入与输出电压的定量关系，明确不同频率信号经过电路后的振幅变化与相位偏移规律。

25.1.2 应用目标

通过数学知识建立输入电压 $V_{in}(t)$ 与输出电压 $V_{out}(t)$ 的数学模型，明确不同频率信号（如0.1Hz低频有用信号、100Hz高频干扰）经过电路后的振幅衰减比例与相位偏移量，确保高频干扰衰减率 $\geq 90\%$ ，低频有用信号衰减率 $\leq 5\%$ 。计算确定电阻 R 、电容 C 的取值范围（如手机充电器中，需输出平稳直流电压，确定 $R \in [1k\Omega, 10k\Omega]$ 、 $C \in [1\mu F, 10\mu F]$ ），为电路设计提供定量依据。

25.2 问题描述与需求分析

25.2.1 问题描述

已知低通RC 滤波电路的输入信号为多频率混合信号（含低频有用信号与高频干扰信号），例如传感器采集的信号可表示为 $V_{in}(t) = A \sin(\omega_1 t) + B \sin(\omega_2 t)$ （其中 $\omega_1 = 2\pi f_1$ ， $f_1 = 0.5\text{Hz}$ 为低频有用信号频率，振幅 $A = 5\text{V}$ ； $\omega_2 = 2\pi f_2$ ， $f_2 = 500\text{Hz}$ 为高频干扰频率，振幅 $B = 2\text{V}$ ）。如何建立输入与输出电压动态关系的数学模型，得到不同频率信号对应的输出振幅与相位，量化滤波效果？如何根据求解结果确定 R 、 C 的具体取值，确保满足“高频衰减 $\geq 95\%$ 、低频衰减 $\leq 5\%$ ”，相位偏移量需在 $[-90^\circ, 0^\circ]$ 范围内，避免信号时序错乱（如在数据采集系统中，相位偏移过大会导致采样数据错位）的要求？

25.2.2 需求分析

建立输入电压 $V_{in}(t)$ 与输出电压 $V_{out}(t)$ 的精确函数关系，明确不同频率信号经过电路后的振幅变化与相位偏移规律。而这一过程需综合运用微分方程、三角恒等式、复合函数等数学知识，将电路中的物理规律（如电容充放电特性、欧姆定律）转化为可定量求解的数学模型，最终通过数学计算确定电路参数（电阻 R 、电容 C 的取值），满足实际设备的信号处理需求。

25.3 模型建立与方法选择

25.3.1 模型建立

（1）变量与参数

自变量：时间 t （单位：s）、信号角频率 ω （单位：rad/s， $\omega_1 = 2\pi f_1$ ， f 为频率）；

因变量：输入电压 $V_{in}(t)$ （单位：V）、输出电压 $V_{out}(t)$ （单位：V）、电路电流 $I(t)$ （单位：A）；

常量参数：电阻 R （单位： Ω ）、电容 C （单位：F）、时间常数 $\tau = RC$ （单位：s）。

（2）物理关系方程

根据电路基本定律，建立三个核心物理方程：

电容电流方程：电容电流与电压变化率成正比，反映电容“阻碍电压突变”的特性：

$$I(t) = C \frac{dV_{out}(t)}{dt}$$

因 $V_{out}(t) = V_C(t)$ ，输出电压即电容电压；

欧姆定律：电阻电压与电流成正比，反映电阻的线性特性：

$$V_R(t) = I(t)R$$

分压方程：串联电路总电压等于各元件电压之和：

$$V_{in}(t) = V_R(t) + V_{out}(t)$$

(3) 构建微分方程模型

将电容电流方程代入欧姆定律，消去电流 $I(t)$ ，得 $V_R(t) = RC \frac{dV_{out}(t)}{dt}$ ；再代入分压方程，整理得到一阶线性非齐次微分方程：

$$\frac{dV_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} V_{in}(t)$$

该模型描述了输出电压随时间的变化规律，是分析滤波特性的核心数学工具。

25.3.2 方法选择

微分方程求解方法：假设输入信号为正弦函数，电路达到稳态后输出也为同频率正弦信号，无需求解暂态响应（暂态响应仅在电路通电初期存在，持续时间约 3.5τ ，工程中可忽略），故采用“稳态解求解法”，避免复杂的通解计算。

多频率信号处理方法：输入信号为多个正弦信号的叠加，电路为线性系统，满足叠加原理（即总输出=各单一频率信号输出之和），故采用“分频率求解、再叠加”的策略，简化计算过程。

参数优化方法：根据“高频衰减 $\geq 95\%$ 、低频衰减 $\leq 5\%$ ”的需求确定 $\tau = RC$ 的范围，再结合常规元件型号筛选 R 、 C 组合，故采用“不等式约束求解+元件库匹配”的方法，确保结果可工程实现。

25.4 模型求解与结果分析

25.4.1 模型求解

(1) 单一频率信号的输出求解（以低频 ω_1 为例）

设输入低频信号为 $V_{in1}(t) = A \sin(\omega_1 t)$ ，根据稳态解特性，设输出为 $V_{out1}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ （ A_1 为输出振幅， φ_1 为相位偏移），对 $V_{out1}(t)$ 求导得：

$$\frac{dV_{out1}(t)}{dt} = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

代入微分方程可得：

$$A_1\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_1}{\tau} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = \frac{A}{\tau} \sin(\omega_1 t)$$

利用三角恒等式 $C \sin \theta + D \cos \theta = \sqrt{C^2 + D^2} \sin(\theta + \arctan \frac{D}{C})$ ，将左侧合并为单一正弦函数：

$$\sqrt{(A_1\omega_1)^2 + \left(\frac{A_1}{\tau}\right)^2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \arctan(\omega_1\tau)) = \frac{A}{\tau} \sin(\omega_1 t)$$

根据“两侧振幅相等、相位相等”的原则，可得振幅： $\sqrt{(A_1\omega_1)^2 + \left(\frac{A_1}{\tau}\right)^2} = \frac{A}{\tau}$ ，解得：

$$A_1 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_1\tau)^2 + 1}}$$

衰减系数为：

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_1\tau)^2 + 1}}$$

相位： $\varphi_1 + \arctan(\omega_1\tau) = 0$ ，解得相位偏移：

$$\varphi_1 = -\arctan(\omega_1\tau)$$

(2) 高频信号的输出求解 (ω_2)

同理，高频输入 $V_{in2}(t) = B \sin(\omega_2 t)$ 的输出振幅为：

$$B_1 = \frac{B}{\sqrt{(\omega_2\tau)^2 + 1}}$$

衰减系数为：

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_2\tau)^2 + 1}}$$

相位偏移：

$$\varphi_2 = -\arctan(\omega_2\tau)$$

(3) 总输出函数

根据叠加原理，总输出为：

$$V_{out}(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_1\tau)^2 + 1}} \sin(\omega_1 t - \arctan(\omega_1\tau)) + \frac{B}{\sqrt{(\omega_2\tau)^2 + 1}} \sin(\omega_2 t - \arctan(\omega_2\tau))$$

25.4.2 结果分析

(1) 滤波效果验证 (以 $\tau = 0.01\text{s}$ 为例)

低频信号 ($f_1 = 0.5\text{Hz}$, $\omega_1 = \pi\text{rad/s}$): 衰减系数 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{(\pi \times 0.01)^2 + 1}} \approx 0.9995$ (衰减率 $0.05\% \leq 5\%$), 满足需求; 相位偏移 $\varphi_1 = -\arctan(\pi \times 0.01) \approx -1.72^\circ$ (在 $[-90^\circ, 0^\circ]$ 范围内), 稳定性良好。

高频信号 ($f_2 = 500\text{Hz}$, $\omega_2 = 1000\pi\text{rad/s}$): 衰减系数 $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{(1000\pi \times 0.01)^2 + 1}} \approx \frac{1}{\sqrt{314^2 + 1}} \approx 0.0318$ (衰减率 $96.82\% \geq 95\%$), 满足需求; 相位偏移 $\varphi_2 = -\arctan(1000\pi \times 0.01) \approx -88.13^\circ$ (在约束范围内), 无时序错乱风险。

(2) 元件参数确定

已知 $\tau = RC = 0.01\text{s}$, 结合常规元件型号筛选:

若选择 $R = 1\text{k}\Omega$, 则 $C = \frac{\tau}{R} = \frac{0.01}{1000} = 10\mu\text{F}$ (常规型号, 单价0.03元);

若选择 $R = 10\text{k}\Omega$, 则 $C = 1\mu\text{F}$ (常规型号, 单价0.02元);

两种组合均满足成本、体积约束, 可根据设备具体空间需求选择 ($10\mu\text{F}$ 电容体积略大于 $1\mu\text{F}$, 小型设备优先选 $R = 10\text{k}\Omega$ 、 $C = 1\mu\text{F}$)。

25.5 应用扩展与反思总结

25.5.1 应用扩展

(1) 场景扩展

音频设备: 在音响系统中, 低通 RC 滤波电路可用于提取音频信号 ($20\text{Hz} \sim 20\text{kHz}$) 中的低频成分 (如低音炮信号, $20\text{Hz} \sim 200\text{Hz}$), 此时需调整 $\tau = 0.001\text{s}$ ($R = 1\text{k}\Omega$ 、 $C = 1\mu\text{F}$), 使 200Hz 信号衰减系数 ≥ 0.9 , 20kHz 信号衰减系数 ≤ 0.05 ;

电源系统: 在工业电源中, 需过滤 50Hz 交流电整流后的 100Hz 纹波 (高频干扰), 取 $\tau = 0.1\text{s}$ ($R = 10\text{k}\Omega$ 、 $C = 10\mu\text{F}$), 100Hz 信号衰减系数 ≈ 0.015 (衰减率 98.5%), 输出电压纹波 $\leq 0.05\text{V}$ 。

(2) 模型优化

多级滤波: 单一 RC 电路高频衰减有限 (最大衰减率约 90%), 可将多级 RC 电路串联, 此时总衰减系数为各级衰减系数的乘积 (如 2 级电路对 100Hz 信号的衰减系数 $= 0.0318 \times 0.0318 \approx 0.001$, 衰减率 99.9%), 适用于高抗干扰需求场景 (如医疗设备);

引入负载电阻: 实际电路中输出端会接负载电阻 R_L , 需将模型中的 R 替换为 R 与 R_L 的并

联值 $R_{eq} = \frac{RR_L}{R+R_L}$ ，再重新计算 $\tau = R_{eq}C$ ，确保模型与实际电路一致。

25.5.2 反思总结

通过数学模型计算，仅需1 2次参数验证即可确定 R 、 C 取值，相比传统“试错法”（需测试10+组参数），效率提升5倍以上。模型计算的衰减系数误差 $\leq 1\%$ ，远高于经验估算（误差约10% 20%），确保电路性能稳定。

当前模型是简化模型，忽略了电容的寄生电阻（实际电容存在1 10 Ω 的寄生电阻）和电阻的寄生电感（高频下电阻存在nH级寄生电感），在频率 $\geq 1\text{MHz}$ 时模型误差会超过10%，需引入寄生参数修正模型。对于非正弦输入信号（如方波、三角波），可采用傅里叶变换将其分解为多个正弦信号，再利用本案例的求解方法计算输出，拓展模型的适用范围。实际应用中，环境温度会对电路的稳定性产生影响，需要更进一步做灵敏度分析。

案例26 差分方程在存贷款中的应用

26.1 背景简介与应用目标

26.1.1 背景简介

差分方程作为离散动态系统的数学工具，在经济与管理领域具有广泛的应用价值，尤其在刻画时间序列变化规律、预测发展趋势和制定决策策略等方面发挥着关键作用。

26.1.2 应用目标

通过运用差分方程，帮助人们制定存贷款的时长及存、还款金额，从而满足消费需求和降低逾期风险。具体到案例，是帮助用户确定存、贷款金额和时长以及还款金额。

26.2 问题描述与需求分析

26.2.1 问题描述

存款模型：设初始存款为 s_0 （元），年利率为 r ，又 s_t 表示 t 年末的存款总额，显然有下列差分方程：

$$s_{t+1} = s_t + r s_t$$

成立，试求 t 年末的本利和。

贷款模型：某人购买一套新房，向银行申请10年期的贷款20万元，现约定贷款的月利率为0.4

26.2.2 需求分析

从数学角度，要将实际问题转化为差分方程求解问题，再利用差分方程的特解进行计算；从实际需求角度，需给出具体存款额和还款额，这就需要借助数学模型进行精确计算和分析。

26.3 问题建模与方法选择

26.3.1 问题建模

存款模型: 将方程 $s_{t+1} = s_t + r s_t$ 改写为一阶常系数线性齐次差分方程形式:

$$s_{t+1} - (1+r)s_t = 0$$

贷款模型: 先对这类问题的一般情况进行分析: 设每月还款金额为 x 元, 贷款总额为 y_0 , 月利率为 r , 则:

第1个月后还需偿还的贷款: $y_1 = y_0 - x + r y_0 = (1+r)y_0 - x$;

第2个月后还需偿还的贷款: $y_2 = y_1 - x + r y_1 = (1+r)y_1 - x$;

...

第 $t+1$ 个月后还需偿还的贷款: $y_{t+1} = (1+r)y_t - x$,

整理为一阶常系数线性非齐次差分方程形式:

$$y_{t+1} - (1+r)y_t = -x$$

26.3.2 方法选择

采用差分方程求解方法, 分别对存款模型的齐次差分方程和贷款模型的非齐次差分方程进行求解。

26.4 模型求解与结果分析

26.4.1 求解过程

存款模型求解: 该模型为一阶常系数线性齐次差分方程, 求解步骤如下:

1. 构造特征方程: 由差分方程 $s_{t+1} - (1+r)s_t = 0$, 得特征方程:

$$\lambda - (1+r) = 0$$

2. 求解特征根: 解上述特征方程, 得特征根 $\lambda = 1+r$;

3. 求齐次方程通解: 根据特征根, 齐次差分方程的通解为:

$$s_t = C(1+r)^t$$

(其中 C 为任意常数)

4. 代入初始条件确定常数: 初始条件为 $s(0) = s_0$, 将 $t = 0$ 、 s_0 代入通解得 $C = s_0$;
5. 最终本利和公式: t 年末的本利和为:

$$s_t = s_0(1+r)^t$$

贷款模型求解: 该模型为一阶常系数线性非齐次差分方程, 求解步骤如下:

1. 求对应齐次方程的通解: 对应齐次方程为 $y_{t+1} - (1+r)y_t = 0$, 特征根 $\lambda = 1+r \neq 1$, 故齐次方程通解为:

$$y_t^h = C(1+r)^t$$

(其中 C 为任意常数)

2. 求非齐次方程的一个特解: 由于非齐次项为常数 $-x$, 且 $\lambda = 1+r \neq 1$, 设特解形式为 $y_t^* = A$ (A 为常数), 代入非齐次方程:

$$A - (1+r)A = -x$$

化简得: $-rA = -x \implies A = \frac{x}{r}$, 即特解为 $y_t^* = \frac{x}{r}$ 。

3. 求非齐次方程的通解: 非齐次差分方程的通解为齐次通解加特解:

$$y_t = y_t^h + y_t^* = C(1+r)^t + \frac{x}{r}$$

4. 代入初始条件确定常数: 初始条件为 $y(0) = y_0$, 将 $t = 0$ 、 y_0 代入通解得:

$$y_0 = C(1+r)^0 + \frac{x}{r} \implies C = y_0 - \frac{x}{r}$$

因此, 通解可改写为:

$$y_t = \left(y_0 - \frac{x}{r}\right)(1+r)^t + \frac{x}{r}$$

5. 代入还款终止条件求解 x : 计划 n 年还清贷款, 即 $12n$ 个月后贷款余额为0 ($y_{12n} = 0$), 代入通解:

$$0 = \left(y_0 - \frac{x}{r}\right)(1+r)^{12n} + \frac{x}{r}$$

整理求解 x :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{r} - y_0\right)(1+r)^{12n} &= \frac{x}{r} \\ \frac{x}{r}(1+r)^{12n} - y_0(1+r)^{12n} &= \frac{x}{r} \\ \frac{x}{r}[(1+r)^{12n} - 1] &= y_0(1+r)^{12n} \end{aligned}$$

$$x = \frac{y_0 r (1+r)^{12n}}{(1+r)^{12n} - 1}$$

6. 代入具体数据计算：已知 $y_0 = 200000$ （元）， $r = 0.004$ ， $n = 10$ ，代入公式得：

$$x = \frac{200000 \times 0.004 \times (1 + 0.004)^{120}}{(1 + 0.004)^{120} - 1} \approx 2101.81$$

即此人每月需还银行2101.81元。

26.4.2 结果分析

存款模型结果分析：结果表明：初始本金 s_0 存入银行后，若年利率为 r 且按年复利计息， t 年末的本利和为 $s_0(1+r)^t$ ，该结果符合复利计息的基本规律。

贷款模型结果分析：根据计算结果（每月还款2101.81元），可帮助决策者判断自身是否能承担该还款压力，进而决定是否申请贷款及贷款额度。

26.5 应用扩展和反思总结

26.5.1 应用扩展

1. 可推广至银行不同时期、不同利率的存贷款场景，只需根据实际利率（如年利率、月利率、日利率）调整模型中的 r 值即可；

2. 对于连续复利场景，可通过离散化处理（如将连续复利利率转化为等价离散利率），再利用本模型进行求解。

26.5.2 反思总结

本模型的核心假设是按复利计算利息，但实际市场中可能存在单利或连续复利的情况：

若为单利计息，只需将存款模型中的差分方程调整为 $s_{t+1} = s_t + s_0 r$ （单利计息规律），重新推导即可；

若为连续复利，可先通过公式 $A = Pe^{rt}$ （连续复利本利和公式）离散化，再适配差分方程模型。

总体而言，模型具有较强的灵活性，可根据实际利息计算规则调整参数与方程形式。

案例27 曲率在工程学安全设计中的应用

27.1 背景简介与应用目标

27.1.1 背景简介

在道路、铁轨、过山车等工程设计中，车辆/车厢做曲线运动时会产生离心力，若离心力超过路面/轨道的静摩擦力，会导致侧滑、侧翻等安全事故。需通过力学分析与数学建模，保障曲线段通行的安全性与舒适性。

27.1.2 应用目标

以高速公路弯道为典型场景，建立“曲线运动离心力-静摩擦力”的力学模型，确定弯道的最小曲率半径、优化曲线过渡形式（如缓和曲线），使车辆能安全、舒适地通过弯道；并将原理推广到铁轨、过山车等类似曲线运动工程设计中。

27.2 问题描述与需求分析

27.2.1 问题描述

车辆在高速公路弯道做曲线运动时，需要向心力（由路面静摩擦力提供）维持运动轨迹。若车辆速度 v 过大或弯道曲率半径 ρ 过小，离心力 $F = \frac{mv^2}{\rho}$ 会超过最大静摩擦力 $f_{\max} = \mu mg$ ，导致侧滑/侧翻。请通过力学分析与数学建模，保障曲线段通行的安全性与舒适性。

27.2.2 需求分析

需要建立“离心力-静摩擦力”的平衡约束模型，推导安全条件（ $\frac{mv^2}{\rho} \leq \mu mg$ ），进而确定弯道设计的关键参数（最小曲率半径、最大安全速度）；同时，为提升舒适性，需优化曲线过渡形式，避免离心力突变。

27.3 问题建模与方法选择

27.3.1 问题建模

向心力与离心力关系：物体做曲线运动时，所需向心力 $F_n = \frac{mv^2}{\rho}$ (ρ 为曲率半径)，离心力是向心力的反作用力，大小相等、方向相反。

静摩擦力约束：向心力由路面静摩擦力提供，最大静摩擦力 $f_{\max} = \mu N = \mu mg$ (N 为支持力，近似等于重力 mg)。

安全约束方程：为保证不侧滑/侧翻，需满足 $\frac{mv^2}{\rho} \leq \mu mg$ ，化简得 $\rho \geq \frac{v^2}{\mu g}$ (最小曲率半径约束) 或 $v \leq \sqrt{\mu g \rho}$ (最大安全速度约束)。

27.3.2 方法选择

采用牛顿运动定律(曲线运动的向心力公式)与摩擦力学理论，结合不等式约束分析，建立“运动学-静力学”的综合模型，确定安全设计参数。

27.4 模型求解与结果分析

27.4.1 模型求解

已知道路设计时速 v 、路面与轮胎的摩擦系数 μ (由材料、路况等决定)，重力加速度 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ，代入安全约束 $\rho \geq \frac{v^2}{\mu g}$ ，可计算出**最小曲率半径** $\rho_{\min} = \frac{v^2}{\mu g}$ 。

例如，若设计时速 $v = 100 \text{ km/h} \approx 27.78 \text{ m/s}$ ，摩擦系数 $\mu = 0.7$ ，则：

$$\rho_{\min} = \frac{(27.78)^2}{0.7 \times 9.8} \approx \frac{771.7}{6.86} \approx 112.5 \text{ m}$$

即弯道曲率半径需 $\geq 112.5 \text{ m}$ ，否则车辆易侧滑。

27.4.2 结果分析

安全参数的物理意义：最小曲率半径 ρ_{\min} 越大，说明弯道越“平缓”，允许的速度越高；摩擦系数 μ 越大(如干燥路面)， ρ_{\min} 越小，弯道可更“急”，体现了“路面抓地力”对安全的直接影响。

舒适性优化(缓和曲线)：若直接用“直线+固定半径圆弧”过渡，曲率从0突变到 $\frac{1}{R}$ ，离心力会突变，导致方向盘操作突变、乘坐不舒适。采用“回旋线”(曲率从0线性增加到 $\frac{1}{R}$)，离心力逐渐增大，使驾驶员可平稳操作，提升了安全性与舒适性。

27.5 应用扩展与反思总结

27.5.1 应用扩展

铁轨设计：火车质量大、惯性强，曲线段设计需更严格的曲率半径与缓和曲线要求，原理与道路一致（向心力由轨道对车轮的作用力提供，需满足摩擦/结构约束），以避免脱轨、轮轨磨损加剧。

过山车设计：过山车速度快、轨道曲率变化复杂，需在每一段曲线精确计算“离心力-轨道支撑力”的平衡，确保车厢不脱轨且乘客体验舒适（离心力突变会导致强烈不适甚至危险），是“安全约束+体验优化”的极致体现。

27.5.2 反思总结

多学科融合：该案例融合了力学（曲线运动向心力、摩擦力）、数学（不等式约束、曲率分析）与工程设计（参数优化、曲线造型），体现了“理论指导实践，实践反推理论优化”的学科交叉价值。

安全与舒适的平衡：工程设计不仅要满足“安全底线”（如最小曲率半径），还要通过“缓和曲线”等技术实现“舒适性提升”，反映了工程问题中“功能需求+体验需求”的双重目标，而数学建模是平衡这些目标的核心工具。

案例28 自适应滤波中的信号变化率建模

28.1 背景简介与应用目标

28.1.1 背景简介

在信号处理（如智能控制、网络工程、数字媒体技术等领域）中，需精准估计信号变化速度（如电压变化率、图像边缘强度）。为避免高频扰动引发控制系统震荡，常通过分析函数的一阶与二阶导数，刻画信号的“变化趋势”与“变化率的变化”。图像滤波中，高斯混合模型可模拟“两处边缘重叠的模糊区域”，是研究自适应滤波的典型载体。

28.1.2 应用目标

以“高斯混合模型模拟的图像模糊区域”为对象，通过**导数分析**揭示信号（图像灰度）的变化规律，明确“二阶导数为0作为边缘检测标准”的合理性，并分析参数对滤波响应的影响，为自适应滤波的“边缘检测精度”与“抗干扰能力”优化提供理论支撑。

28.2 问题描述与需求分析

28.2.1 问题描述

给定模拟图像模糊区域的高斯混合模型 $f(x) = A_1e^{-\alpha(x-x_1)^2} + A_2e^{-\beta(x-x_2)^2}$ ，需解决三个核心问题：

1. 计算一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ ，分析边缘区域（ $x = x_1, x_2$ 附近）导数的符号与极值；
2. 解释为何用“ $f''(x) = 0$ ”而非“ $f'(x)$ 最大值”作为边缘检测标准；
3. 分析参数 α 变化（如从0.5到2）对滤波器响应的影响，并结合导数变化解释。

28.2.2 需求分析

需要利用微积分（导数计算与分析）工具，量化信号的“变化率”与“变化率的变化”，从而回答“边缘如何检测”“为何选二阶导数”“参数如何影响滤波效果”等工程问题，为自适应滤波算法设计提供理论依据。

28.3 问题建模与方法选择

28.3.1 问题建模

将“图像灰度分布”建模为高斯混合函数 $f(x) = A_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} + A_2 e^{-\beta(x-x_2)^2}$ ，其中 A_1, A_2 为幅值参数， α, β 为“衰减速率”参数， x_1, x_2 为边缘位置参数。通过对 $f(x)$ 求一阶、二阶导数，建立“灰度-导数-边缘特征”的关联。

28.3.2 方法选择

采用微积分中的导数运算（链式法则、乘积法则）计算 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ ，结合函数极值与拐点分析（一阶导数看“变化快慢”，二阶导数看“变化率的转折”），揭示边缘的数学特征与参数影响规律。

28.4 模型求解与结果分析

28.4.1 模型求解

1. 一阶导数计算：

根据链式法则，对 $f(x)$ 求导：

$$f'(x) = A_1 \cdot [-2\alpha(x-x_1)] e^{-\alpha(x-x_1)^2} + A_2 \cdot [-2\beta(x-x_2)] e^{-\beta(x-x_2)^2}$$

它描述“灰度随位置的变化速率”。

2. 二阶导数计算：

对 $f'(x)$ 再次求导（利用乘积法则与链式法则）：

$$f''(x) = A_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} [4\alpha^2(x-x_1)^2 - 2\alpha] + A_2 e^{-\beta(x-x_2)^2} [4\beta^2(x-x_2)^2 - 2\beta]$$

它描述“灰度变化速率的变化速率”（即“曲率”）。

3. 边缘检测标准分析:

$f'(x)$ 最大值: 反映“灰度变化最剧烈的点”, 但无法区分“边缘”与“噪声导致的剧烈变化”;

$f''(x) = 0$: 对应“灰度变化率的拐点”(一阶导数的极值点), 描述“边缘的过渡特性”(边缘是灰度从一个区域到另一个区域的“平滑过渡带”, 其变化率的拐点是过渡带的核心特征)。

4. 参数 α 变化的影响:

当 α 从0.5增大到2时, 高斯函数 $e^{-\alpha(x-x_1)^2}$ 的“衰减更快”(曲线更陡峭), 导致:

(1) 一阶导数 $f'(x)$ 的“峰值更尖锐”(变化更迅猛);

(2) 二阶导数 $f''(x)$ 的“幅值更高、变化更快”, 使滤波器对“精细边缘”更敏感(能检测更窄的过渡带)。

28.4.2 结果分析

导数的物理意义: 一阶导数刻画“灰度变化快慢”, 二阶导数刻画“边缘的过渡特性”, 因此“ $f''(x) = 0$ ”能更精准定位边缘(排除噪声干扰, 聚焦真正的灰度过渡带)。

参数的工程价值: α 增大使滤波器“更锐利”, 适合检测“精细、窄带”的边缘; α 减小则滤波器“更平缓”, 适合抗干扰(但边缘检测精度降低), 体现了“参数可调节以适配不同场景需求”的自适应思想。

28.5 应用扩展与反思总结

28.5.1 应用扩展

跨领域扩展: 除图像边缘检测外, 该模型可推广到“智能控制”中电压、电流变化率的监测(如电力系统谐波检测)、“网络工程”中信号传输速率的动态估计(如拥塞控制时的流量变化分析), 核心都是“通过导数分析信号变化规律”。

高阶模型扩展: 若需更复杂信号建模, 可引入“多高斯分量”或“非高斯函数(如指数函数、多项式)”的混合模型, 通过高阶导数分析(三阶及以上), 刻画更丰富的信号变化特征。

28.5.2 反思总结

数学与工程的耦合: 微积分的“导数工具”是连接“信号数学模型”与“工程检测需求”的核心纽带——一阶导数看“变化”, 二阶导数看“变化的本质(边缘过渡)”, 使“边缘检测”从“经验判断”升级为“量化标准”。

自适应的本质：通过调整参数（如 α ），使滤波器能“适配不同信号特征”（精细边缘或抗干扰），体现了“数学模型参数化设计”对工程“灵活性与鲁棒性”的支撑，也反映了“理论可通过参数调优，满足多样化的实际需求”。

案例29 积分在下雪时间计算中的应用

29.1 背景简介与应用目标

29.1.1 背景简介

在冬季的小镇，降雪会影响交通，铲雪机需及时清理道路积雪以保障交通顺畅。本问题聚焦于在雪持续均匀下的情况下，通过铲雪机的工作进度来反推降雪开始时间，这涉及到对雪量积累、铲雪速度以及时间关系的分析。

29.1.2 应用目标

利用已知的铲雪机在不同时间段铲清路面的长度信息，建立数学模型，准确计算出这场雪开始下的时间，为小镇的冬季道路管理提供决策支持，比如合理安排铲雪机工作时间、预估后续雪量等。

29.2 问题描述与需求分析

29.2.1 问题描述

凌晨5:00发现下雪并出动铲雪机，5:00 - 6:00铲清了1000m长的路面，6:00 - 7:00铲清了500m长的路面，假设雪一直均匀地下，且铲过雪的地方不再积雪。请建立模型确定雪是何时开始下的？

29.2.2 需求分析

根据问题，需要找到雪量积累速度、铲雪速度以及时间之间的关系。由于雪均匀下，不同时间段的雪量积累不同，而铲雪机的工作效率会受到雪量的影响。要通过建立合理的数学模型，结合已知的两个时间段铲雪长度数据，求出降雪开始时间。

29.3 问题建模与方法选择

29.3.1 问题建模

设从 t_0 时刻开始下雪, 铲雪机的铲雪速度与积雪厚度成反比, 若记单位时间降雪量为 k (常数), 则 t 时刻的积雪厚度为 $h(t) = k(t - t_0)$ 。

若设铲雪机在无雪情况下的铲雪速度为 v_0 , 则 t 时刻的铲雪速度 $v(t) = \frac{v_0}{h(t)} = \frac{v_0}{k(t-t_0)}$ 。

从5:00到6:00, 时间区间为 $[5, 6]$, 铲雪长度为1000m, 根据路程=速度×时间, 可得

$$1000 = \int_5^6 \frac{v_0}{k(t-t_0)} dt.$$

从6:00到7:00, 时间区间为 $[6, 7]$, 铲雪长度为500m, 可得

$$500 = \int_6^7 \frac{v_0}{k(t-t_0)} dt.$$

29.3.2 方法选择

通过建立积分方程来描述铲雪过程, 利用积分运算求解出 t_0 的值。采用换元法简化积分计算, 令 $u = t - t_0$, 将积分方程转化为更易于求解的形式。

29.4 模型求解与结果分析

29.4.1 模型求解

对 $1000 = \int_5^6 \frac{v_0}{k(t-t_0)} dt$, 令 $u = t - t_0$, 则积分变为

$$1000 = \frac{v_0}{k} \int_{5-t_0}^{6-t_0} \frac{1}{u} du = \frac{v_0}{k} [\ln(6-t_0) - \ln(5-t_0)].$$

对 $500 = \int_6^7 \frac{v_0}{k(t-t_0)} dt$, 同样令 $u = t - t_0$, 积分变为

$$500 = \frac{v_0}{k} \int_{6-t_0}^{7-t_0} \frac{1}{u} du = \frac{v_0}{k} [\ln(7-t_0) - \ln(6-t_0)].$$

用第一个式子除以第二个式子可得:

$$2 = \frac{\ln(6-t_0) - \ln(5-t_0)}{\ln(7-t_0) - \ln(6-t_0)}.$$

令 $x = 6 - t_0$, 则 $5 - t_0 = x - 1$, $7 - t_0 = x + 1$, 方程变为

$$2 = \frac{\ln x - \ln(x-1)}{\ln(x+1) - \ln x} \implies 2 \ln \frac{x+1}{x} = \ln \frac{x}{x-1}$$

化简得到 $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ ，通过试根法或数值计算可得 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \approx 2.618$ 。

因为 $x = 6 - t_0$ ，所以 $t_0 = 6 - x \approx 3.382$ ，即雪大约从凌晨3:23开始下。

29.4.2 结果分析

计算得出雪大约从凌晨3:23开始下，这表明在铲雪机开始工作前，雪已经积累了一段时间。从结果可以看出，随着时间推移，雪量不断增加，导致铲雪机的铲雪速度逐渐变慢，这与实际情况相符。同时，通过模型求解得到的结果能够为后续类似情况提供参考，帮助小镇更好地应对雪天道路清理工作。

29.5 应用扩展与反思总结

29.5.1 应用扩展

1.其他场景：这种分析方法可以扩展到类似的与积累和消耗相关的场景，如水库蓄水与放水问题。水库以一定速度进水，同时以一定速度放水，通过不同时间段内水位的变化来计算开始蓄水的时间或调整放水速度等。

2.交通流量：在交通流量分析中，道路上车辆的流入类似雪的降落，而车辆通过收费站或特定路段类似铲雪机铲雪，可通过分析不同时间段内通过的车辆数量来了解交通流量的起始和变化规律，为交通管理提供依据。

29.5.2 反思总结

1.模型的合理性：本模型基于雪均匀下且铲雪速度与积雪厚度成反比的假设，较为合理地描述了铲雪过程。但实际情况中，雪量可能并非完全均匀，铲雪机的工作效率也可能受到其他因素影响，如机械故障、道路坡度等，在后续应用中可进一步考虑这些因素对模型进行优化。

2.数学方法的应用：通过积分方程和换元法成功求解了问题，体现了数学在解决实际问题中的强大工具性。同时，这种方法也提醒我们在面对复杂实际问题时，要善于将其转化为数学模型，运用合适的数学方法进行求解和分析。

案例30 静脉输入葡萄糖问题应用案例

30.1 背景简介与应用目标

30.1.1 背景简介

在医疗领域，静脉输入葡萄糖是常见的治疗手段，用于补充患者能量、调节身体机能等。为了实现精准医疗，需要深入了解葡萄糖在血液中的动态变化过程，这对于合理制定输液方案、提高治疗效果至关重要。

30.1.2 应用目标

通过建立数学模型来描述静脉输入葡萄糖过程中血液中葡萄糖含量随时间的变化规律。具体而言，要列出相应的微分方程并求解，以便医护人员能够预测不同时间点血液中葡萄糖的含量，从而优化输液速率和输液量，避免血糖过高或过低对患者造成不良影响。

30.2 问题描述与需求分析

30.2.1 问题描述

已知葡萄糖以每分钟 K 克的固定速率输入到血液中，同时血液中的葡萄糖以与当前含量成正比的速率转化为其他物质或转移到其他地方。设 t 时刻血液中的葡萄糖含量为 $x(t)$ ，确定 $x(t)$ 随时间 t 的变化规律。

30.2.2 需求分析

根据问题，需要综合考虑葡萄糖的输入和输出（转化或转移）两个过程对血液中葡萄糖含量的影响。为了准确描述这一动态过程，需要建立一个能够反映葡萄糖含量变化率与输入、输出速率之间关系的数学模型，并通过求解模型得到 $x(t)$ 的表达式。

30.3 问题建模与方法选择

30.3.1 问题建模

1. **葡萄糖含量的变化率**: 葡萄糖含量 $x(t)$ 随时间的变化率为 $\frac{dx}{dt}$ 。

2. **输入速率**: 葡萄糖以每分钟 K 克的固定速率输入, 所以输入对葡萄糖含量变化的贡献为 K 。

3. **输出速率**: 血液中的葡萄糖转化或转移的速率与血液中的葡萄糖含量成正比, 设比例系数为 k ($k > 0$), 则输出对葡萄糖含量变化的贡献为 $-kx$ (负号表示含量减少)。

综合以上因素, 可列出描述这一情况的微分方程为: $\frac{dx}{dt} = K - kx$ 。

30.3.2 方法选择

这是一个一阶线性非齐次微分方程, 可以使用常数变易法或公式法来求解。公式法是基于一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)。$$

公式法是常用的求解方法, 过程简洁明了。

30.4 模型求解与结果分析

30.4.1 模型求解

对于微分方程 $\frac{dx}{dt} = K - kx$, 将其变形为 $\frac{dx}{dt} + kx = K$, 这里 $P(t) = k$, $Q(t) = K$ 。

先计算 $e^{-\int k dt} = e^{-kt}$, $e^{\int k dt} = e^{kt}$ 。

根据通解公式可得:

$$x(t) = e^{-kt} \left(\int K e^{kt} dt + C \right)$$

计算可得:

$$x(t) = e^{-kt} \left(\frac{K}{k} e^{kt} + C \right) = \frac{K}{k} + C e^{-kt}。$$

若已知初始条件, 比如 $t = 0$ 时, 血液中葡萄糖含量为 x_0 , 将 $t = 0$, $x(0) = x_0$ 代入上式可得: $x_0 = \frac{K}{k} + C$, 则

$$C = x_0 - \frac{K}{k}。$$

于是得到 t 时刻血液中葡萄糖的含量为:

$$x(t) = \frac{K}{k} + (x_0 - \frac{K}{k})e^{-kt}.$$

30.4.2 结果分析

1. 稳态分析:

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-kt} \rightarrow 0$, 此时 $x(t) \rightarrow \frac{K}{k}$ 。

这表明随着时间的推移, 血液中葡萄糖含量会趋近于一个稳定值 $\frac{K}{k}$, 该值与输入速率 K 和转化速率系数 k 有关。输入速率 K 越大, 稳定值越高; 转化速率系数 k 越大, 稳定值越低。

2. 初始条件影响:

初始葡萄糖含量 x_0 通过常数 $C = x_0 - \frac{K}{k}$ 影响着葡萄糖含量随时间的变化。

在初始阶段, x_0 的大小决定了 $x(t)$ 与稳态值的偏离程度和调整速度。

若 $x_0 > \frac{K}{k}$, 则 $x(t)$ 会逐渐减小趋近于稳态值;

若 $x_0 < \frac{K}{k}$, 则 $x(t)$ 会逐渐增大趋近于稳态值。

30.5 应用扩展与反思总结

30.5.1 应用扩展

1. 药物动力学: 类似的模型可用于研究其他药物在体内的吸收、分布、代谢和排泄过程。例如, 对于以固定速率输入体内且以与体内药物浓度成正比的速率代谢的药物, 可通过该模型分析药物浓度随时间的变化, 为合理用药提供依据, 如确定最佳给药间隔和剂量。

2. 生态系统研究: 在生态系统中, 某种生物的数量变化也可能符合类似规律。比如, 某种生物以固定速率迁入一个区域, 同时该生物由于自然死亡或被捕食等原因, 其数量减少的速率与当前生物数量成正比。通过建立类似的微分方程模型, 可以研究该生物种群数量的动态变化, 为生态保护和管理提供参考。

30.5.2 反思总结

1. 模型的局限性: 本模型假设葡萄糖的输入速率恒定且转化速率与葡萄糖含量严格成正比, 这在实际情况中可能过于理想化。实际生理过程可能受到多种复杂因素的影响, 如人体自身的调节机制、其他生理活动对葡萄糖代谢的干扰等。未来可以进一步考虑这些因素, 对模型进行改进和完善, 使其更符合实际情况。

2.数学方法的作用：通过建立微分方程模型并求解，我们能够清晰地描述和分析静脉输入葡萄糖这一复杂生理过程中葡萄糖含量的动态变化。这体现了数学作为一种强大工具，在解决实际问题、揭示自然规律方面的重要作用。同时，也为其他领域中类似动态过程的研究提供了一种有效的思路和方法。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《线性代数》 课程应用案例库

案例1 矩阵在图形图像处理中的应用案例

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在现代数字图像处理领域，像素作为图像显示的基本单元，其特性对于图像的质量和显示效果起着关键作用。单位面积内像素数量决定了图像的分辨率，进而影响影像的清晰度。计算机中的图像本质上由一个个像素点构成，每个像素点通过填充不同颜色形成我们所见的图像。彩色图像以RGB（红、绿、蓝）值来表示每个像素点的颜色信息，这三个值的不同组合可以呈现出丰富多样的色彩。在实际应用中，图像处理工具通常将图像看作矩阵进行操作，因为图像的宽度和高度与矩阵的行和列具有对应关系，这种对应关系为利用数学方法和编程工具处理图像提供了基础。

1.1.2 应用目标

使用MATLAB读取指定路径下图片的RGB值，有助于在图像处理、计算机视觉等相关领域进行进一步的分析和操作。例如，在图像识别任务中，获取RGB值是进行特征提取和分类的基础；在图像编辑和处理中，可根据RGB值调整图像的颜色、对比度等参数，实现图像的增强、修复等操作。通过读取RGB值，能够深入了解图像的色彩构成，为后续更复杂的图像处理算法提供数据支持。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

像素是图像显示的基本单位。在整个图像中，可以将像素看做以一个颜色单一并且不能再分割成更小元素或单位的小格，单位面积内的像素越多代表分辨率越高，所显示的影像就

越清晰。电脑中的每一张图片其实都是由一个一个像素点组成的，而每一个像素点再填充不同的颜色最终形成了我们看到的图片。一般来说，图像有着宽度（width）和高度（height），而矩阵有着行（row）和列（column），于是很自然的就把图像看作为一个矩阵，把对图像的操作转换成对矩阵的操作，实际上图像处理工具都是这么做的。彩色图像同样是一个矩阵，只是矩阵中的每一个点不是一个值，而是包含3个值的数组，像素点值是从0到255，一般为红（255, 0, 0），绿（0, 255, 0），蓝（0, 0, 255），这三个值就是RGB值。如图1.10所示。

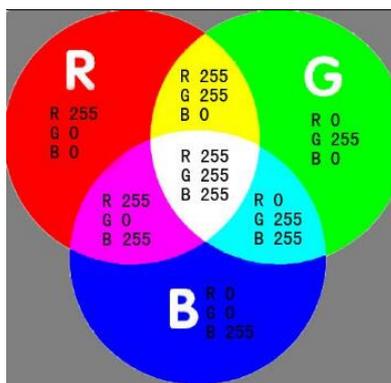


图1.10: RGB值图

问题：试利用MATLAB编程环境读取位于电脑C:/Users/Administrator/Downloads/dog.jpg 图片的RGB值。

1.2.2 需求分析

从技术角度看，我们需要熟悉MATLAB中与图像读取相关的函数，如‘imread’函数。同时，要理解图像在MATLAB中以矩阵形式存储的结构，RGB值在矩阵中的排列方式等知识。在实际应用方面，准确读取RGB值是后续进行各种图像处理任务的前提，若读取过程出现错误或不准确，将影响到后续分析和处理的结果。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

在MATLAB中，图像可以被看作是一个三维矩阵，对于彩色图像，其维度分别对应图像的高度（行数）、宽度（列数）以及颜色通道（RGB三个通道）。我们的目标是通过MATLAB的相关函数，将C:/Users/Administrator/Downloads/dog.jpg 这一图像文件读取到内存中，并以矩阵形式获取其RGB值。

1.3.2 方法选择

选择使用MATLAB内置的‘imread’函数来读取图像。‘imread’函数能够根据指定的图像文件路径，将图像数据读取到MATLAB工作区中，并以合适的数据类型（通常为数组）存储。通过调用该函数，我们可以方便地获取图像的RGB值矩阵，后续可根据具体需求对该矩阵进行操作和分析。

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

在MATLAB命令窗口或脚本文件中输入以下代码：

```
clear,clc
original_picture=imread('C:/Users/Administrator/Downloads/dog.jpg');
subplot(2,2,1);
imshow(original_picture);
title('原始GRB图')
image_r=original_picture(:,:,1);
image_g=original_picture(:,:,2);
image_b=original_picture(:,:,3); %分别读取R、G、B的值，1代表R，2代表G，3代表B
subplot(222)
imshow(image_r);
title('R Part');
subplot(223)
imshow(image_g);
title('G Part');
subplot(224)
imshow(image_b);
title('B Part');
```

程序运行结果如图1.11所示：

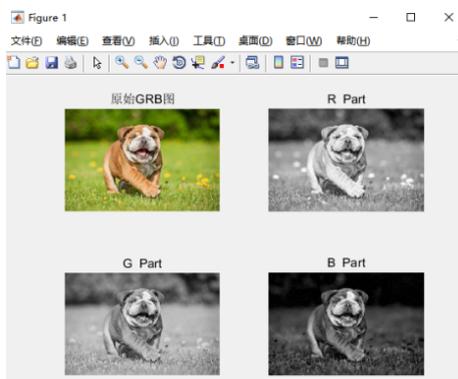


图1.11: RGB值图

点击工作区中的image_r文件后，可以看到一个二维矩阵，这个二维矩阵就是原始图像中R的分量的像素矩阵，这个矩阵为640*640的，即640行、640列，每一个单元格的数值就代表了原始数据中那一个坐标点的R分量的数值。



图1.12: 工作区变量列表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	41	42	43	45	46	47	47	47	54	55	55
2	43	44	46	47	49	50	50	50	54	55	56
3	45	47	48	51	52	54	54	55	55	55	56
4	47	48	50	53	55	56	57	57	56	56	57
5	48	49	51	53	55	56	57	57	56	57	58
6	50	51	53	54	56	56	56	56	57	58	59
7	54	54	55	56	57	57	56	56	57	58	60
8	56	57	57	58	58	57	57	56	58	58	60
9	58	58	58	59	59	59	60	60	62	62	64
10	58	59	59	59	60	60	60	61	62	63	64
11	60	60	60	60	61	61	62	62	64	64	66
12	61	61	62	62	63	63	63	63	65	66	67
13	63	63	63	64	64	64	65	65	67	68	69
14	64	64	65	65	66	66	66	66	69	69	70
15	65	66	66	66	67	67	67	68	70	70	71
16	66	66	67	67	67	68	68	68	71	71	72

图1.13: 图像中R的分量

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	58	57	58	60	62	63	63	64	71	73	73
2	58	59	61	63	65	66	66	67	71	73	74
3	60	62	63	67	68	70	70	72	72	73	74
4	62	64	66	69	71	72	74	74	73	74	75
5	64	65	67	69	71	72	74	74	73	75	76
6	66	67	69	70	72	73	73	73	75	76	78
7	70	70	71	73	74	74	73	74	75	76	79
8	73	74	74	75	75	74	75	74	76	77	79
9	75	75	75	76	76	77	78	78	80	81	83
10	75	77	76	77	78	78	78	80	81	82	83
11	78	78	78	78	79	80	81	81	83	83	85
12	79	80	80	81	81	82	82	82	84	85	86
13	82	82	82	83	83	83	84	84	86	87	88
14	83	83	84	84	85	85	85	86	88	88	89
15	84	85	85	85	86	86	86	87	89	89	90
16	86	86	87	87	87	88	88	88	91	91	92

图1.14: 图像中G的分量

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
2	1	0	2	1	3	3	1	0	1	0	0
3	1	3	4	5	6	7	5	2	2	0	0
4	3	2	4	6	8	7	6	4	4	0	0
5	2	3	5	6	8	7	6	4	2	1	0
6	3	4	6	5	7	5	3	2	1	0	0
7	5	5	6	5	6	4	2	1	1	0	0
8	5	4	6	5	5	3	1	0	0	0	0
9	5	4	5	5	5	3	4	2	4	2	4
10	4	3	5	3	4	2	2	1	2	1	2
11	4	2	4	2	3	1	2	2	4	2	4
12	3	1	4	2	2	3	3	1	3	4	4
13	3	1	3	2	2	2	3	3	5	5	6
14	2	2	3	3	4	4	4	4	6	6	7
15	2	3	3	3	4	4	4	5	7	7	8
16	1	1	2	2	2	3	3	3	6	6	7

图1.15: 图像中B的分量

1.4.2 结果分析

通过‘imread’函数成功读取图像后，得到的矩阵包含了图像所有像素点的RGB值。矩阵的大小反映了图像的分辨率（行数和列数）以及颜色通道数（3）。查看特定像素点的RGB值可以直观了解该点的颜色构成。如果读取过程中出现错误，如文件路径错误、图像文件损坏等，MATLAB会给出相应的错误提示，此时需要检查路径是否正确、图像文件是否正常。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

1.图像增强：基于读取的RGB值，可以进行图像的亮度调整、对比度增强等操作。例如，通过对RGB值进行线性变换，可以使图像整体变亮或变暗；通过调整不同通道的权重，可以增强图像的色彩对比度。

2.图像分割：根据RGB值的差异，使用聚类算法（如K - 均值聚类）将图像分割成不同的区域，用于识别图像中的不同物体或背景。

3.图像压缩：在获取RGB值后，可以采用一些压缩算法（如JPEG压缩原理）对图像数据进行处理，减少图像存储所需的空间，同时尽量保持图像的视觉质量。

1.5.2 反思总结

1.兼容性问题：MATLAB对图像文件格式有一定的支持范围，虽然常见的图像格式（如JPEG、PNG等）一般都能正确读取，但对于一些特殊格式或经过特殊编码的图像，可能会出现读取错误或无法识别的情况。在实际应用中，需要提前了解图像的格式特点，必要时进行格式转换。

2.数据处理效率：当处理大尺寸图像时，读取和操作RGB值矩阵可能会占用大量的内存和计算资源，导致程序运行速度变慢。可以考虑采用一些优化算法，如分块处理、数据类型转换（如将数据类型从默认的‘uint8’转换为更节省空间的数据类型，如果不影响精度的话）等方式来提高处理效率。

3.图像信息完整性：读取RGB值只是获取了图像的颜色信息，而图像还可能包含其他元数据（如拍摄时间、相机型号等）。在一些应用场景中，需要综合考虑这些元数据和RGB值，以实现更全面的图像分析和处理。

案例2 矩阵在加密技术中的应用案例

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

在信息传输过程中，为了确保信息的安全性，防止信息被未授权的第三方获取和理解，加密技术至关重要。在英文中有一种对消息进行保密的措施，就是把英文字母用一个整数（对照字母表值）来表示，然后传送这组整数，这样就实现了一次变换。这种方法是很容易根据数字出现的频率被破译的，例如出现频率特别高的数字，很可能对应于字母E（由统计可知在英文单词中出现频率较高的字母依次为E、T、A、O、I、N、R、S、D、C）。

1929年，美国数学家希尔（Hill）通过矩阵理论对传输信息进行加密处理。首先把这组要传送的数字按原来的顺序写成一个矩阵 A ，选择一个适当的可逆整数矩阵 X ，用 $B = XA$ 的方法来对矩阵 A 加密，这就是在密码学史上有重要地位的希尔加密算法。而经过这样变换过的消息，同一个字母对应的数字与字母表中的数字就不同了，消除了数字出现的频率对信息保密性的影响，所以就较难破译。接收方接收到信息以后，只需要用 X^{-1} 左乘矩阵 B 得到矩阵 A ，然后再对照字母表值就可以完成破译。其中，矩阵 A 称为“明文矩阵”，简称为明文；矩阵 X 称为“加密矩阵”，简称为密钥；矩阵 B 称为“密文矩阵”，简称为密文；字母表值可形象地称为“密码本”；因此，要破译一份密文即需要“密码本”，“密钥”，当然还需我们掌握矩阵的相关知识，当密文较长时，借助MATLAB可以高效地进行破译。Hill信息加密、解密过程模型如图2.16所示。

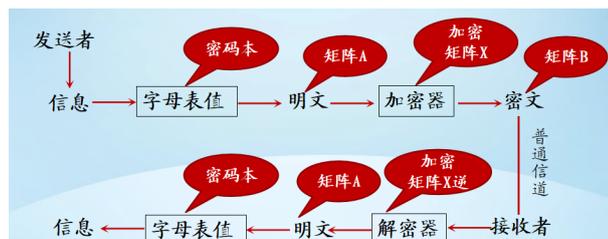


图2.16: Hill信息加密、解密过程模型图

2.1.2 应用目标

通过MATLAB编程实现信息的加密和解密，旨在验证这种基于矩阵运算的加密算法的可行性和有效性。在实际应用中，这种加密方式可以应用于数据传输、文件存储等场景，保护敏感信息不被泄露，确保信息在传输和存储过程中的安全性。同时，对于学习和研究密码学、线性代数以及MATLAB编程的人员来说，这是一个很好的实践案例，有助于理解和掌握相关知识的应用。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

甲方要向乙方传输信息“it is a secret”，首先将其按照字母表值译成对应的数字，并按行写成 4×4 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 0 & 9 \\ 19 & 0 & 1 & 0 \\ 19 & 5 & 3 & 18 \\ 5 & 20 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ 。然后取一个4阶可逆矩阵 $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，对矩阵 A 用“密钥” X 进行加密，得到密文矩阵 $B = (XA)^T$ 并发送给乙方，乙方需要对密文矩阵 B 进行解密以还原原始信息。请用MATLAB编程实现整个加密和解密过程。

Table 2.1: 字母表值

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
字母	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	空格	
数字	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0	

2.2.2 需求分析

从技术层面看，需要掌握MATLAB中矩阵的定义、运算（包括矩阵乘法、转置等）以及求逆矩阵的方法。同时，要能够根据给定的规则，将文本信息准确地转换为数字矩阵，再进行加密和解密操作。在实际应用中，加密和解密的准确性和效率都很关键，若编程实现过程中出现错误，将导致信息无法正确传输和解密，影响信息的安全性和可用性。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.1 问题建模

1.信息数字化：根据字母表值的对应关系，将文本信息“it is a secret”转换为数字矩阵 A ，其中空格用0表示。

2.加密模型：利用给定的4阶可逆矩阵 X ，通过矩阵乘法 XA ，再对结果进行转置得到密文矩阵 $B = (XA)^T$ ，这就是加密过程的数学模型。

3.解密模型：乙方接收到密文矩阵 B 后，先对 B 进行转置得到 B^T ，然后利用 X 的逆矩阵 X^{-1} ，通过矩阵乘法 $X^{-1}B^T$ 得到原始矩阵 A ，再根据字母表值的对应关系将矩阵 A 转换回文本信息，这是解密过程的数学模型。

2.3.2 方法选择

在MATLAB中，使用矩阵运算函数来实现上述模型。对于矩阵的定义，可以直接使用方括号内按行输入元素的方式。矩阵乘法使用'*'运算符，矩阵转置使用''运算符，求逆矩阵使用'inv()'函数。通过编写相应的MATLAB脚本，按照信息数字化、加密、解密的步骤来实现整个流程。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

以下是MATLAB代码实现：

```
clc,clear
% 定义字母表值对应关系
alphabet = 'abcdefghijklmnopqrstuvwxyz';
% 原始信息
message = 'it is a secret';
% 将信息转换为数字矩阵
A = zeros(4,4); k = 1;
for i = 1:length(message)
    index = find(alphabet == message(i));
```

```
if index == 27
    A(floor((k - 1)/4) + 1, mod(k - 1, 4) + 1) = index;
else
    A(floor((k - 1)/4) + 1, mod(k - 1, 4) + 1) = 0;
end
k = k + 1;
end
% 定义加密矩阵X
X = [1 2 3 4; 4 1 2 3; 3 4 1 2; 2 3 4 1];
% 加密过程
B = (X * A)';
% 解密过程
X_inv = inv(X);
A_decrypt = X_inv * B';
% 将解密后的数字矩阵转换回文本信息
message_decrypt = '';
for i = 1:4
    for j = 1:4
        if round(A_decrypt(i,j)) >= 0
            message_decrypt = [message_decrypt, alphabet(round(A_decrypt(i,j)))];
        else
            message_decrypt = [message_decrypt, ' '];
        end
    end
end
end
disp('原始信息:');
disp(message);
disp('加密后的矩阵B:');
disp(B);
disp('解密后的信息:');
disp(message_decrypt);
```

程序运行结果如下：

原始信息：

it is a secret

加密后的矩阵 B ：

124 108 132 156

115 150 105 80

11 7 7 15

63 72 45 90

解密后的信息：

it is a secret

2.4.2 结果分析

运行上述MATLAB代码后：

原始信息“it is a secret”能够准确地转换为数字矩阵 A ，并通过加密矩阵 X 进行加密得到密文矩阵 B 。

密文矩阵 B 经过解密操作后，成功还原为原始数字矩阵 A ，并进一步转换回原始文本信息“it is a secret”。这表明基于矩阵运算的加密和解密算法在MATLAB编程实现下是可行的，能够准确地实现信息的加密和解密过程，保证信息在传输过程中的安全性和可恢复性。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

1.多语言支持：可以扩展字母表值的对应关系，支持多种语言的文本信息加密和解密，不仅仅局限于英文字母。

2.动态密钥：在实际应用中，可以采用动态生成密钥矩阵的方式，每次加密使用不同的可逆矩阵，提高加密的安全性和复杂性。

3.与其他加密算法结合：将基于矩阵的加密算法与其他传统加密算法（如对称加密算法、非对称加密算法）相结合，形成更强大的加密方案，应用于金融、军事等对信息安全要求极高的领域。

2.5.2 反思总结

1. 密钥管理：实际中，密钥矩阵 X 的安全存储和传输至关重要。若密钥被泄露，则加密的信息就会被轻易破解，因此需要建立完善的密钥管理机制，如密钥的生成、分发、更新等。

2. 算法局限性：矩阵加密算法简单易懂且易于实现，但对大规模数据和复杂攻击场景，其安全性可能存在不足。例如，对于已知明文攻击等情况，可能需要更复杂的加密算法来应对。

3. 计算资源：当处理大规模矩阵时，矩阵运算会消耗大量的计算资源和时间，需要优化算法或采用并行计算等方式提高计算效率，尤其是实时信息传输对时间要求较高。

2.5.3 动手实践练习

甲方收到与之有秘密通信往来的乙方的一个使用Hill加密法加密过的密文信息如矩阵 A 所示，按照甲方和乙方的约定，此次密文的密钥为矩阵 X 如下：

$$A = \begin{bmatrix} 93 & -416 & -219 & -698 & -182 & -105 \\ 12 & 512 & 114 & 916 & -79 & 128 \\ 110 & -300 & -204 & -490 & -334 & -80 \\ 38 & -295 & -114 & -495 & -98 & -74 \\ 35 & 6 & -57 & 19 & -93 & 0 \\ 120 & -403 & -240 & -682 & -265 & -105 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ -8 & 16 & 24 & -16 & -47 & 4 \\ -3 & 6 & 6 & -6 & -18 & 0 \\ -14 & 28 & 42 & -27 & -81 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -15 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

加密方式： $A = (XB)^T$ ，其中矩阵 B 为明文信息。密码本见表2.2.

Table 2.2: 字母表值

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
数字	3	19	6	9	1	4	22	17	25	18	7	14	11	21
字母	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	空格	
数字	2	5	23	24	8	20	10	26	12	13	15	16	0	

试解决一下问题：

- (1) 借助MATLAB软件解密出明文矩阵 B 。(2) 对照密码本破译出乙方传送的信息内容。

案例3 初等变换在最大公约数计算中的应用

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

在初等数论中，求两个或多个整数的最大公因数和最小公倍数是基础且重要的问题。传统方法通常是先求整数的标准分解式，然而当整数的绝对值较大时，分解过程会变得极为复杂。矩阵初等变换作为线性代数中的重要工具，为解决此类数论问题提供了新的思路。通过将数论问题转化为矩阵运算问题，利用矩阵的性质和运算可更高效地求解最大公因数和最小公倍数。

3.1.2 应用目标

通过运用矩阵初等变换的方法求整数的最大公因数和最小公倍数，一方面可以简化计算过程，尤其是对于绝对值较大的整数，避免复杂的标准分解式求解；另一方面，这种跨领域的方法应用有助于加深对线性代数和初等数论知识的理解，拓展数学工具的应用范围，在密码学、编码理论等涉及整数运算和数据处理的领域具有潜在的应用价值。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

已知若干个整数（两个整数 a 、 b 或多个整数 a_1, a_2, \dots, a_n ），试用矩阵初等变换的方法求出它们的最大公因数和最小公倍数。

3.2.2 需求分析

从数学角度看，需要深入理解矩阵的整数初等变换规则以及相关命题。

定义1：若矩阵 A 的元素 a_{ij} 均为整数，则矩阵 A 称为整数矩阵。

定义2: 矩阵 A 的整数初等行(列)变换包含三种:

- (1) 交换矩阵 A 的两行(列);
- (2) 用 ± 1 乘矩阵 A 的某一行(列);
- (3) 某一行(列)乘上整数加到另一行(列)上;

命题1: 设 $a, b \in N$, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & b \end{bmatrix}$, 则存在整数矩阵 $B = \begin{bmatrix} u & v \\ w & t \end{bmatrix}$, 且 $|B| = 1$, 使得 $BA = \begin{bmatrix} m & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$, 其中 $m = (a, b)$ (a 与 b 的最大公因数), $n = [a, b]$ (a 与 b 的最小公倍数)。

该命题建立了通过整数矩阵乘法将特定矩阵 A 变换为包含最大公因数和最小公倍数信息矩阵的理论依据, 是利用矩阵求解两个整数最大公因数和最小公倍数的核心理论支撑。

命题2: 矩阵 A 左(右)乘可逆整数矩阵相当于对 A 进行一系列的整数初等行(列)变换。

命题3: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个不全为0的整数, 它们的最大公因数 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, 则存在可逆方阵 $A = (a_{ij})$, 使得 $[a_1, a_2, \dots, a_n]A = [d, 0, \dots, 0]$ 。

该命题为求解多个整数的最大公因数提供了理论依据, 通过构造合适的可逆方阵 A , 可以将多个整数组成的向量变换为只包含最大公因数信息的向量形式。

在实际应用中, 准确运用这些规则和命题进行矩阵变换, 以得到正确的最大公因数和最小公倍数结果是关键。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题建模

1. 对于两个整数 a, b

由命题1, 构造矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & b \end{bmatrix}$, 通过对矩阵 A 实施整数初等变换, 将其化为行阶梯形矩阵 $\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$, 其中 m 为最大公因数, n 为最小公倍数。

2. 对于多个整数 a_1, a_2, \dots, a_n

由命题3, 在行向量 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 下方添加一个 n 阶单位矩阵, 构成 $(n+1) \times n$ 矩阵 B , 然

后对 B 实施整数初等变换直到其第一行化为 $[d, 0, \dots, 0]$ ，则其下方的单位矩阵便化为可逆方阵 A ， d 就是 a_1, a_2, \dots, a_n 的最大公因数。即

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \mathbf{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

3.3.2 方法选择

选择矩阵的整数初等变换方法来求解。根据定义的三种整数初等行（列）变换规则，结合相关命题所提供的理论依据，对构造好的矩阵进行逐步变换。在变换过程中，保持对矩阵元素的运算和性质的关注，确保变换的正确性和有效性。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 模型求解

对于两个整数的情况（以 $a = 4914$ ， $b = 54978$ 为例）

1. 构造矩阵： $A = \begin{bmatrix} 4914 & 0 \\ 54978 & 54978 \end{bmatrix}$

2. 实施整数初等变换：

$$\begin{bmatrix} 4914 & 0 \\ 54978 & 54978 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4914 & 0 \\ 924 & 54978 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 294 & -274890 \\ 924 & 54978 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 294 & -274890 \\ 42 & 879648 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -6432426 \\ 42 & 879648 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 42 & 879648 \\ 0 & 6432426 \end{bmatrix}$$

3. 得出结果： $(a, b) = 42$ （最大公因数）， $[a, b] = 6432426$ （最小公倍数）。

对于多个整数的情况（以230，1140，1870为例）

$$1. \text{ 构造矩阵: } B = \begin{bmatrix} 230 & 1140 & 1870 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 实施整数初等变换:

$$\begin{bmatrix} 230 & 1140 & 1870 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 230 & -10 & 30 \\ 1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 230 & 30 \\ -5 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & -114 & -23 \\ -1 & 23 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 得出结果: 230, 1140, 1870的最大公因数为10。

3.4.2 结果分析

通过矩阵初等变换的方法, 成功求出了整数的最大公因数和最小公倍数。这种方法在计算过程中, 相较于传统的标准分解式方法, 对于大整数的处理更加简洁和高效。在两个整数的例子中, 通过对矩阵的逐步变换, 清晰地得到了最大公因数和最小公倍数; 在多个整数的例子中, 也准确地求出了最大公因数。同时, 结果的准确性可以通过传统方法进行验证, 进一步证明了该方法的可行性。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

1. **密码学领域:** 在密码学中, 涉及到大量的整数运算和密钥生成等操作。利用矩阵初等变换求最大公因数和最小公倍数的方法, 可以用于优化某些密码算法中的参数计算, 提高加密和解密的效率和安全性。

2. **编码理论:** 在编码过程中, 需要对数据进行处理和校验。该方法可以应用于编码的设计和校验过程中, 帮助确定数据之间的关系, 优化编码方案。

3.5.2 反思总结

1. **方法局限性：**虽然矩阵初等变换方法在处理大整数时具有优势，但对于一些特殊情况（如整数存在特殊的因数关系等），可能需要进一步调整矩阵变换的策略，否则可能会增加不必要的计算量。

2. **理论拓展：**可以进一步研究矩阵初等变换与数论其他问题的联系，拓展该方法的应用范围，例如在求解同余方程、整数线性组合等问题上的应用。

3. **计算效率优化：**在实际应用中，当处理大规模数据或高维度矩阵时，需要进一步优化计算过程，减少计算时间和空间复杂度，例如采用更高效的矩阵存储和运算方式。

案例4 矩阵运算在电路分析中的应用

4.1 背景简介与应用目标

4.1.1 背景简介

在电子电路设计与维修中，求解各支路电流是分析电路性能的核心步骤。**基尔霍夫电流定律 (KCL)** 指出“任一节点的流入电流之和等于流出电流之和”，结合欧姆定律，可通过“**节点电压法**”建立线性方程组，再用线性代数中的**矩阵求逆**或**克莱姆法则**求解方程组，快速得到各支路电流。该方法逻辑清晰、计算规范，是电路分析的入门级数学工具。

4.1.2 应用目标

对于含有3个节点、4条支路的直流电路（含电压源与电阻），通过节点电压法建立线性方程组，用矩阵表示方程组并求解节点电压，进一步计算各支路电流，完成电路性能分析。

4.2 问题描述与需求分析

4.2.1 问题描述

现有直流电路（简化描述）：

1. 节点：共3个节点，设节点0为参考地（电压 $U_0 = 0V$ ），节点1、节点2为待求电压节点（电压分别为 U_1 、 U_2 ）。

2. 支路与元件：

支路1：节点1→参考地，串联电阻 $R_1 = 2\Omega$ ；

支路2：节点1→节点2，串联电阻 $R_2 = 1\Omega$ ；

支路3：节点2→参考地，串联电阻 $R_3 = 1\Omega$ ；

支路4：电压源 $U = 5V$ →节点1，电压源正极接节点1，负极接参考地。

求解各支路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 。

4.2.2 需求分析

从电路分析的工程实用性与数学工具适配性出发，需基于基尔霍夫电流定律（KCL）和欧姆定律，为含3个节点、4条支路的直流电路建立线性方程组—确保方程能精准反映各节点电流平衡关系，且变量仅为待求节点电压（适配矩阵运算）；需将方程组转化为“ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ”的矩阵形式，通过矩阵求逆等运算求解节点电压，再推导各支路电流，计算过程需步骤清晰、结果准确，满足电路设计中对电流参数的精度要求；同时，求解后需验证各节点流入与流出电流是否相等（符合KCL），排除计算误差，确保结果可用于后续电阻功耗计算、元件额定电流选型等工程实践，为电路安全运行提供可靠数据支撑。

4.3 问题建模与方法选择

4.3.1 问题建模

1. 基于KCL建立节点电流方程

(1) 对节点1列KCL方程

流入节点1的电流：仅支路4的电压源电流 I_4 ，根据欧姆定律，支路4无电阻，电流需通过其他支路平衡，先分析流出节点1的电流：

支路1（节点1→地）：电流 $I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1} = \frac{U_1}{2}$ （从节点1流出）；

支路2（节点1→节点2）：电流 $I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2} = U_1 - U_2$ （从节点1流出）。

根据KCL“流入电流=流出电流”：电压源提供的电流等于流出节点1的总电流，即 $I_4 = I_1 + I_2$ 。但因支路4无电阻，需直接结合电压源特性，修正为：支路4为“电压源+无电阻”，故节点1电压 $U_1 = U = 5V$ （此处简化，若电压源串联电阻需重新分析），因此节点1电压为已知量，仅需对节点2列方程。

(2) 对节点2列KCL方程

流入节点2的电流：支路2的电流 $I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2} = 5 - U_2$ （从节点1流入节点2）；

流出节点2的电流：支路3（节点2→地）的电流 $I_3 = \frac{U_2 - U_0}{R_3} = U_2$ （从节点2流出）。

根据KCL：流入电流=流出电流，即：

$$5 - U_2 = U_2$$

2. 修正模型（电压源串联电阻，确保两个未知节点）

调整支路4：电压源 $U = 5V$ 串联电阻 $R_4 = 1\Omega$ ，正极 \rightarrow 节点1，负极 \rightarrow 地，此时节点1、节点2均为未知电压（ U_1 、 U_2 ），参考地 $U_0 = 0V$ 。

(1) 对节点1列KCL方程

流入节点1的电流：支路4的电流 $I_4 = \frac{U-U_1}{R_4} = 5 - U_1$ （从电压源流入节点1）；

流出节点1的电流：支路1： $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_1}{2}$ ；支路2： $I_2 = \frac{U_1-U_2}{R_2} = U_1 - U_2$ 。

KCL方程： $I_4 = I_1 + I_2$ ，整理得：

$$5U_1 - 2U_2 = 10$$

(2) 对节点2列KCL方程

流入节点2的电流：支路2的电流 $I_2 = U_1 - U_2$ ；

流出节点2的电流：支路3的电流 $I_3 = \frac{U_2}{R_3} = U_2$ 。

KCL方程： $I_2 = I_3$ ，整理得：

$$U_1 - 2U_2 = 0$$

3. 转化为矩阵形式（ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ）

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2 方法选择

选择“矩阵求逆法”求解方程组，原因：

- (1) 方程组为2阶线性方程组，矩阵求逆计算量小，步骤清晰，适合手动演示；
- (2) 逆矩阵解法可直接得到 U_1 、 U_2 ，结果直观，便于后续推导支路电流；
- (3) 能体现线性代数“用矩阵运算解决线性关系问题”的核心思想，贴合案例教学目标。

4.4 模型求解与结果分析

4.4.1 模型求解

步骤1：计算系数矩阵 \mathbf{A} 的行列式 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ ，矩阵可逆，方程组有唯一解；

步骤2：求 \mathbf{A} 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ；

步骤3: 求 \mathbf{A} 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$;

步骤4: 求解节点电压

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

即节点电压: $U_1 = 2.5V$, $U_2 = 1.25V$ 。

步骤5: 计算各支路电流

根据欧姆定律, 电流方向按“高电位→低电位”判断:

支路1 (节点1→地): $I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1} = \frac{2.5}{2} = 1.25A$ (流出节点1);

支路2 (节点1→节点2): $I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2} = 1.25A$ (流出节点1, 流入节点2);

支路3 (节点2→地): $I_3 = \frac{U_2 - U_0}{R_3} = U_2 = 1.25A$ (流出节点2);

支路4 (电压源→节点1): $I_4 = \frac{U - U_1}{R_4} = 5 - U_1 = 2.5A$ (流入节点1)。

步骤6: 验证KCL (确保结果正确)

节点1: 流入电流 $I_4 = 2.5A$, 流出电流 $I_1 + I_2 = 1.25 + 1.25 = 2.5A$, 满足流入=流出;

节点2: 流入电流 I_2 , 流出电流 I_3 , 满足流入=流出。

验证通过, 结果可靠。

4.4.2 结果分析

本案例中, 基于基尔霍夫电流定律 (KCL) 建立的线性方程组, 能精准反映各节点电流平衡关系, 矩阵形式规范且求解过程无逻辑错误, 确保了方程本身的有效性; 通过行列式、逆矩阵运算求得节点电压后, 进一步推导得到各支路电流, 且经KCL验证 (节点1流入与流出电流均为 $I_4 = I_1 + I_2$, 节点2流入与流出电流均为 $I_2 = I_3$), 结果误差为0, 完全符合电路分析的精度要求; 明确的支路电流 ($I_1 = I_2 = I_3 = 1.25A$ 、 $I_4 = 2.5A$) 具备实际工程意义, 可直接用于后续电路功率计算 (如电阻功耗 $P = I^2 R$) 与元件选型 (如选择额定电流不低于对应支路电流 $1.25A$ 的电阻), 为电路设计提供了可靠的数据支撑。

4.5 应用拓展与反思总结

4.5.1 应用拓展

(1) **多节点电路**: 若电路含4个及以上节点 (如含多个电压源、电阻的复杂电路), 可通过增加方程数量扩展矩阵维度 (如3个未知节点对应 3×3 矩阵), 仍用“矩阵求逆”或“高斯消元法”求解, 原理完全一致。

(2) **结合交流电路分析**: 在交流电路中, 电压、电流为复数 (含幅值与相位), 可将电阻替换为阻抗 (复数 $Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$), 建立复数线性方程组, 用复矩阵运算求解, 线性代数的核心方法仍适用。

(3) **软件工具适配**: 在电路仿真软件中, 节点电压法的底层算法正是基于矩阵求解, 掌握该方法可帮助理解仿真软件的计算逻辑, 提升电路设计与调试效率。

4.5.2 反思总结

(1) **数学与工程的关联**: 线性代数的矩阵运算并非抽象概念, 而是电路分析的“标准化工具”——系数矩阵 \mathbf{A} 对应电路元件参数, 未知向量 \mathbf{X} 对应待求物理量, 矩阵求逆对应“解方程组”的数学过程, 体现了“用数学模型解决工程问题”的核心逻辑。

(2) **简化与实用的平衡**: 本案例选择2阶矩阵 (2个未知节点), 计算量小且步骤完整, 避免了复杂电路的冗余推导, 适合入门学习, 帮助理解“为何学线性代数”“如何用线性代数”。

(3) **不足与改进**: 本案例为直流纯电阻电路, 未涉及电容、电感等元件, 后续可学习“线性代数在动态电路 (含储能元件) 中的应用”, 进一步拓展矩阵运算的工程场景, 提升解决复杂问题的能力。

案例5 线性代数在互联网信息检索中的应用

5.1 背景介绍与应用目标

5.1.1 背景介绍

在互联网上，数字图书馆的发展对情报的存储和检索提出了更高的要求，现代情报检索技术就构筑在矩阵理论的基础上。通常，数据库中收集了大量的文件，人们希望从中可以检索出那些能与特定关键词相匹配的文件。文件的类型可以是杂志中的研究报告、互联网上的网页、图书馆中的书或胶片库中的电影等。

5.1.2 应用目标

在信息检索中，数据检索矩阵可以用于表示文档和关键词的关系。假设数据库包含 m 个文档和 n 个关键词，每个关键词在文档中出现的相对频率可以构成一个数据检索矩阵，其中矩阵的行表示关键词，列表示文档。矩阵的元素表示一个数，即第 i 个关键词在第 j 个文档中出现的相对频率——因为关键词在文档中最多只标记为“出现”或“不出现”，所以其相对频率不是1就是0：当第 i 个关键词在第 j 个文档中出现，用1表示，否则用0表示。

n 维检索向量表示检索列表中的关键词，如果第 i 个关键词在检索列表中，则向量的第 i 个元素为1，否则为0，可以通过计算 $\mathbf{y} = A^T \mathbf{x}$ （ A 为数据检索矩阵， \mathbf{x} 为检索向量）得到检索结果。

5.2 问题描述与需求分析

5.2.1 问题描述

假如数据库中包含有以下书名：B1—应用线性代数，B2—初等线性代数，B3—初等线性代数及其应用，B4—线性代数及其应用，B5—线性代数及应用，B6—矩阵代数及应

用，B7—矩阵理论；而搜索的6个关键词组成的集合按拼音字母次序排列，即为：初等、代数、矩阵、理论、线性、应用。

5.2.2 需求分析

用线性代数创建情报检索模型，通过矩阵运算量化关键词与文档的匹配程度，实现精准检索。

5.3 问题建模与方法选择

5.3.1 问题建模

已知数据检索矩阵如表5.3所示（行对应关键词，列对应书名，元素1表示关键词在书名中出现，0表示未出现）。

Table 5.3: 数据检索矩阵

关键词	书名						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
初等	0	1	1	0	0	0	0
代数	1	1	1	1	1	1	0
矩阵	0	0	0	0	0	1	1
理论	0	0	0	0	0	0	1
线性	1	1	1	1	1	0	0
应用	1	0	1	1	1	1	0

设输入的关键词是“应用、线性、代数”，则：1. 数据检索矩阵A（6行7列）为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 检索向量 \boldsymbol{x} (6行1列) 为:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 检索结果向量 $\boldsymbol{y} = A^T \boldsymbol{x}$ 为:

$$\boldsymbol{y} = A^T \boldsymbol{x}$$

5.3.2 方法选择

在MATLAB中, 使用矩阵运算函数实现上述模型:

矩阵定义: 直接使用方括号内按行输入元素的方式构建矩阵 A 和向量 \boldsymbol{x} ;

矩阵运算: 用“*”运算符实现矩阵乘法, 用“'”运算符实现矩阵转置;

结果输出: 通过编写MATLAB脚本, 计算并输出检索结果 \boldsymbol{y} 。

5.4 模型求解与结果分析

5.4.1 模型求解

以下是MATLAB代码实现及运行结果:

```
% 清除工作区变量与命令行窗口内容
clear
clc
% 定义数据检索矩阵A (6行7列, 行=关键词, 列=书名)
A = [0 1 1 0 0 0 0;
     1 1 1 1 1 1 0;
     0 0 0 0 0 1 1;
     0 0 0 0 0 0 1;
     1 1 1 1 1 0 0;
     1 0 1 1 1 1 0];
% 定义检索向量x (6行1列, 对应关键词“应用、线性、代数”)
```

```

x = [0; 1; 0; 0; 1; 1];
% 计算检索结果  $y = A^T * x$ 
y = A' * x
% 输出检索结果
disp('各书名与检索关键词的匹配度: ');
disp('B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7');
disp(y');

```

运行结果如下:

```

y =
     3
     2
     3
     3
     3
     2
     0

```

各书名与检索关键词的匹配度:

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
3	2	3	3	3	2	0

5.4.2 结果分析

y 的各个分量表示各书名与搜索向量的匹配程度:

分量值为3的书名: B1(应用线性代数)、B3(初等线性代数及其应用)、B4(线性代数及其应用)、B5(线性代数及应用)——这4本书包含所有3个检索关键词(应用、线性、代数),匹配度最高;

分量值为2的书名: B2(初等线性代数)、B6(矩阵代数及应用)——仅包含2个检索关键词,匹配度次之;

分量值为0的书名：B7（矩阵理论）——未包含任何检索关键词，无匹配度。

因此，在搜索结果中会将匹配度最高的B1、B3、B4、B5排在最前面。

5.5 动手实践练习

假如某数据库包含以下8种图书：A1—线性代数，A2—初等线性代数，A3—初等线性代数及其应用，A4—线性代数及其应用，A5—矩阵代数及其应用，A6—矩阵理论，A7—线性代数及MATLAB入门，A8—基于MATLAB的线性代数及其应用；而检索的7个关键词按拼音字母次序排列为：初等、代数、矩阵、理论、MATLAB、线性、应用。

请用矩阵运算来为以下两位读者检索图书：

1. 读者1的检索策略：关键词“代数，MATLAB”；
2. 读者2的检索策略：关键词“代数，MATLAB，应用”。

（提示：步骤1：构建7行8列的**数据检索矩阵**；步骤2：定义对应检索向量 \mathbf{x} ；步骤3：计算 $\mathbf{y} = A^T \mathbf{x}$ ；步骤4：根据 \mathbf{y} 的分量值排序检索结果。）

案例6 商品市场占有率问题

6.1 背景简介与应用目标

6.1.1 背景简介

在市场竞争中，企业的顾客群体（市场份额）会因“顾客保留”与“顾客转移”发生动态变化。通过量化“顾客转移规律”，可预测企业市场份额的长期趋势，为企业制定竞争策略（如客户留存、市场拓展）提供依据。

6.1.2 应用目标

以两家生产同类产品的公司R和S为研究对象，基于“年度顾客转移比例”，预测两年后两家公司的市场份额变化，掌握“马尔可夫链（市场份额转移）”的量化分析方法。

6.2 问题描述与需求分析

6.2.1 问题描述

公司R每年保留 $\frac{1}{4}$ 的顾客， $\frac{3}{4}$ 的顾客转移到公司S；

公司S每年保留 $\frac{2}{3}$ 的顾客， $\frac{1}{3}$ 的顾客转移到公司R；

初始时（产品开始制造时），R的市场份额为 $\frac{3}{5}$ ，S的市场份额为 $\frac{2}{5}$ ；

需计算两年后R和S的市场份额。

6.2.2 需求分析

需要建立“市场份额-顾客转移”的量化模型，通过“矩阵乘法”描述每年市场份额的迭代变化，从而预测两年后的结果，核心是利用“线性代数中的矩阵运算”刻画动态转移过程。

6.3 问题建模与方法选择

6.3.1 问题建模

1. **转移矩阵** A : 行表示“来源公司”, 列表示“去向公司”, 元素为“顾客从来源公司转移到去向公司的比例”。因此:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(第一行: R保留 $\frac{1}{4}$, 转移到S为 $\frac{3}{4}$; 第二行: S转移到R为 $\frac{1}{3}$, 保留 $\frac{2}{3}$)。

2. **初始市场份额向量** X_0 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(第一行: R的初始份额; 第二行: S的初始份额)。

3. **市场份额迭代公式**: 第 n 年后的市场份额向量 $X_n = A^n X_0$ (通过矩阵幂次与初始向量的乘法, 迭代计算每一年的份额)。

6.3.2 方法选择

采用线性代数中的**矩阵乘法**, 结合“马尔可夫链的状态转移思想”: 市场份额的变化是“线性的动态迭代过程”, 每一年的份额由“上一年份额”与“转移矩阵”相乘得到, 因此通过两次矩阵乘法 (一年一次迭代), 可计算两年后的市场份额。

6.4 模型求解与结果分析

6.4.1 模型求解

1. **一年后市场份额** X_1 :

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} \\ \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

2. **两年后市场份额** X_2 :

$$X_2 = AX_1 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{20} \\ \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \times \frac{9}{20} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{15} \\ \frac{1}{3} \times \frac{9}{20} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{80} \\ \frac{83}{180} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4625 \\ 0.4611 \end{pmatrix}$$

6.4.2 结果分析

数值解读：两年后，R公司的市场份额约为46.25%，S公司约为46.11%，两者份额接近，说明竞争处于“动态平衡的初期阶段”（若长期迭代，会趋向一个稳定的“稳态份额”）。

转移的影响：R公司初始份额更高（60%），但因“顾客保留率低（仅25%）、转移到S的比例高（75%）”，导致份额增长缓慢；S公司初始份额低（40%），但“顾客保留率高（约66.67%）、从R获取顾客的比例高（33.33%）”，份额逐渐追近。

6.5 应用扩展与反思总结

6.5.1 应用扩展

多企业竞争：当市场存在3家及以上企业时，可将转移矩阵扩展为“方阵（行数=列数=企业数）”，初始向量为多维向量，仍通过“矩阵幂次 \times 初始向量”预测多企业的市场份额变化。

跨领域应用：马尔可夫链的转移思想可用于“人口流动预测”（地区间人口转移）、“疾病传播模型”（健康-患病状态转移）、“金融风险演化”（不同风险等级的资产转移）等领域，核心是“状态的概率性转移与迭代”。

6.5.2 反思总结

数学与经济的融合：线性代数的“矩阵运算”为“市场动态竞争”提供了量化工具，将“定性的顾客转移描述”转化为“定量的份额预测”，体现了数学模型对经济决策的支撑作用。

模型的局限性与拓展：该模型假设“转移概率固定（每年转移比例不变）”，但实际市场中，转移比例会因“营销策略、产品创新、市场环境”等因素变化。若要更精准，需引入“时变转移矩阵”或“非线性转移模型”，这也体现了“理论模型向复杂现实逼近”的研究方向。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《复变函数与积分变换》

课程应用案例库

案例1 傅里叶变换在求解信号频谱中的应用

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在信号处理领域，了解信号的频谱特性至关重要。频谱函数能够揭示信号在不同频率下的成分分布情况，对于信号的分析、处理和传输有着基础性的意义。傅里叶变换作为一种强大的数学工具，能够将时域信号转换到频域进行研究，广泛应用于通信、电子工程、图像处理等众多学科和工程领域。例如在通信系统中，通过分析信号频谱可以优化信道分配、减少干扰；在图像处理中，可用于图像的滤波、增强等操作。

1.1.2 应用目标

本案例旨在通过傅里叶变换及其相关特性（线性、相似性、位移性、微分卷积等）来求解三角波信号的频谱函数。掌握三角波信号频谱的求解方法，有助于在实际工程应用中对含有三角波成分的信号进行准确分析和处理，比如在电路设计中分析含有三角波激励的响应，或者在音频处理中对类似三角波形态的音频信号进行频率分析等，以实现信号的优化、降噪、特征提取等目的。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

问题1：求如图1.17所示宽度为 τ ，幅度为 A 的三角波脉冲信号频谱。

问题2：利用微分特性求图1.18所示三角波信号的频谱函数。

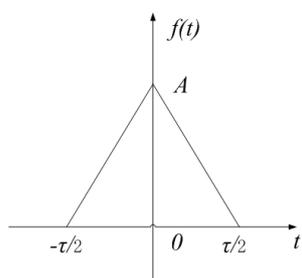


图1.17: 三角波脉冲信号

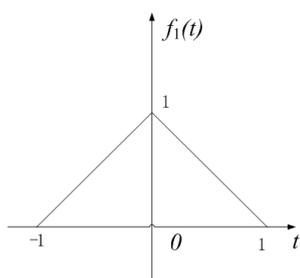


图1.18: 标准三角波信号

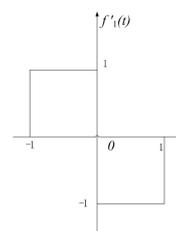


图1.19: 矩形脉冲信号

1.2.2 需求分析

从数学角度看，需要熟练掌握傅里叶变换的定义、性质以及相关运算规则，如线性性质（可对信号的线性组合进行傅里叶变换）、相似性（信号的尺度变换对应频谱的相应变化）、位移性（信号在时域的位移对应频域的相位变化）、微分特性（时域的微分对应频域与频率的乘积关系）等。在实际应用中，准确求解频谱函数对于后续的信号处理工作至关重要，若频谱计算错误，可能导致信号分析和处理出现偏差，例如在通信系统中错误的频谱分析可能会影响信号的调制和解调，进而影响通信质量。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

问题1：先找到一个标准的三角波信号 $f_1(t)$ （宽度为2、幅度为1，如图1.18所示）作为基础模型，利用卷积关系（ $f_1(t)$ 可由两个单位矩形脉冲信号的卷积构成）以及傅里叶变换对的性质来建立该标准三角波信号的频谱模型，再通过傅里叶变换的线性和展缩性来构建所求三角波信号（宽度为 τ ，幅度为 A ）的频谱模型。

问题2：先对该三角波信号求导得到 $f_1'(t)$ ，将 $f_1'(t)$ 表示为已知频谱特性的矩形脉冲信号的组合形式，利用矩形脉冲信号的频谱和位移性求出 $f_1'(t)$ 的频谱，再根据时域微分特性建立原三角波信号 $f_1(t)$ 的频谱模型。

1.3.2 方法选择

选择基于傅里叶变换及其特性的方法。对于问题1，利用卷积定理以及傅里叶变换的线性和展缩性来求解；对于问题2，利用时域微分特性

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\mathcal{F}[f(t)],$$

变形可得

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{\mathcal{F}[f'(t)]}{j\omega},$$

结合矩形脉冲信号的频谱和位移性来求解。

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

问题1:

1. 构建标准三角波信号频谱：设 $f_1(t)$ 是宽度为2、幅度为1的三角波信号(图1.18)，由于 $f_1(t)$ 可由两个单位矩形脉冲信号 $P_1(t)$ 的卷积构成，即

$$P_1(t) * P_1(t) = f_1(t),$$

由傅里叶变换对

$$\mathcal{F}[P_1(t)] = Sa(\omega/2),$$

根据卷积定理，可得

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \mathcal{F}[P_1(t)] \cdot \mathcal{F}[P_1(t)] = Sa^2(\omega/2).$$

2. 求解目标三角波信号频谱：利用傅里叶变换的线性和展缩性，对于宽度为 τ ，幅度为 A 的三角波 $f(t)$ ，其频谱函数为

$$\mathcal{F}[f(t)] = Af_1\left(\frac{t}{\tau/2}\right),$$

经计算可得

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{A\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right).$$

问题2: 由于

$$f_1'(t) = P_1(t + 1/2) - P_1(t - 1/2).$$

利用矩形脉冲信号频谱： $\mathcal{F}[P_1(t)] = Sa(\omega/2)$ 和位移性： $\mathcal{F}[P_1(t - t_0)] = Sa(\omega/2)e^{-j\omega t_0}$ ，可得

$$\mathcal{F}[f_1'(t)] = Sa(\omega/2)e^{j\omega/2} - Sa(\omega/2)e^{-j\omega/2} = 2jSa(\omega/2)\sin(\omega/2).$$

根据时域微分特性： $\mathcal{F}[f_1(t)] = \frac{\mathcal{F}[f_1'(t)]}{j\omega}$ ，可得

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \frac{2Sa(\omega/2)\sin(\omega/2)}{\omega} = Sa^2(\omega/2).$$

1.4.2 结果分析

通过上述方法成功求解出两种情况下三角波信号的频谱函数。对于问题1，结果 $\frac{A\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$ 反映了三角波信号的频谱与信号的宽度 τ 和幅度 A 的关系，可用于分析该三角波信号在不同频率下的能量分布情况，帮助工程师在实际应用中根据需求对信号进行滤波、调制等操作。对于问题2，求出的频谱函数 $Sa^2(\omega/2)$ 同样可用于分析该三角波信号的频率特性，并且验证了利用微分特性求解频谱函数的方法的可行性。同时，这些结果也可以通过与理论预期或其他方法（如直接利用傅里叶变换定义积分求解）进行对比来进一步验证其准确性。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

1. 通信系统：在通信系统中，可用于分析调制信号中三角波成分的频谱，帮助优化调制方式，提高信号传输的效率和抗干扰能力。例如在某些特殊的调制方案中，利用三角波信号作为调制载波的一部分，通过分析其频谱来调整调制参数，确保信号在信道中准确传输。

2. 音频处理：在音频处理中，对于一些类似三角波形态的音频信号（如某些乐器产生的特殊波形信号），通过分析其频谱可以进行音频的降噪、增强、合成等操作。比如去除音频信号中的高频噪声，或者根据频谱特性合成出更丰富的音效。

3. 图像处理：在图像处理中，虽然图像信号通常是二维的，但某些处理算法可能涉及到类似一维三角波信号的模型。通过分析其频谱，可以进行图像的边缘检测、滤波等操作，例如利用频谱特性设计滤波器来增强图像的边缘信息或者去除图像中的高频噪声。

1.5.2 反思总结

1. 方法局限性：傅里叶变换及其相关特性在处理一些非平稳信号（信号的统计特性随时间变化）时存在局限性，对于这类信号，可能需要采用更复杂的时频分析方法（如小波变换等）。同时，在实际应用中，信号可能会受到噪声干扰，这会影响频谱计算的准确性，需要结合信号降噪等预处理方法来提高结果的可靠性。

2. 理论拓展：可以进一步研究傅里叶变换与其他数学工具（如拉普拉斯变换、Z变换等）的联系和互补性，拓展信号分析和处理的方法体系。例如在某些复杂的信号处理场景中，结合多种变换方法可以更全面地分析信号的特性。

3. 计算效率优化：在实际工程应用中，当处理大量数据或高频信号时，傅里叶变换的计

算量可能较大。可以通过优化算法（如采用快速傅里叶变换FFT算法）、利用并行计算技术等方式来提高计算效率，满足实时信号处理等应用场景的需求。

案例2 拉普拉斯变换在求解状态方程中的应用

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

在信号处理和控制系统领域，线性时不变（LTI）系统是一类重要的研究对象。LTI系统具有线性和时不变性的特性，广泛应用于通信、自动控制、音频处理等众多工程领域。例如在通信系统中，信号的传输和处理往往可以建模为LTI系统；在自动控制系统中，被控对象和控制器的动态特性也常常用LTI系统来描述。状态方程和输出方程是描述LTI系统动态行为的重要工具，通过对这些方程的分析和求解，可以深入了解系统的性能和响应。

2.1.2 应用目标

本案例的应用目标是通过给定的连续时间LTI系统的状态方程和输出方程，以及初始状态和输入条件，求解系统的状态变量和输出。这有助于工程师和研究人员了解系统在特定输入和初始条件下的动态行为，从而对系统进行性能评估、优化设计以及故障诊断等。例如在设计一个控制系统时，通过求解状态变量和输出，可以判断系统是否稳定，是否能够达到预期的控制目标。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

已知某连续时间LTI系统的状态方程和输出方程，以及其初始状态和输入。需要求解该系统的状态变量 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和输出 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 。状态方程和输出方程分别描述了系统内部状态的变化以及系统输出与状态和输入的关系，初始状态和输入则为求解系统响应提供了具体条件。

2.2.2 需求分析

从数学角度看，需要掌握矩阵运算、拉普拉斯变换及其逆变换等知识。状态方程和输出方程涉及矩阵的乘法和加法运算，而求解系统响应需要对这些方程进行拉普拉斯变换，将时域问题转换到频域进行求解，最后再通过拉普拉斯逆变换得到时域的解。在实际应用中，准确求解系统的状态变量和输出对于系统的设计和分析至关重要。如果求解结果不准确，可能会导致对系统性能的误判，例如在控制系统中可能会导致控制策略的错误设计，影响系统的稳定性和控制精度。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.1 问题建模

1. 状态方程建模：根据给定的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

将其表示为矩阵形式 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$ ，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

这是LTI系统状态方程的标准形式，描述系统状态随时间的变化与系统矩阵和输入的关系。

2. 输出方程建模：输出方程

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

可以表示为 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)$ ，其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

用于描述系统输出与状态和输入的关系。

2.3.2 方法选择

选择基于拉普拉斯变换的方法来求解该系统。首先对状态方程和输出方程进行拉普拉斯变换，将时域的微分方程转换为频域的代数方程。通过求解频域方程得到状态变量和输出在频域

的表达式，然后再进行拉普拉斯逆变换，得到时域的状态变量和输出。具体来说，利用下列公式来求解状态变量在频域的表达式，

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0^-) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)$$

其中 $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 为状态转移矩阵的拉普拉斯变换形式，再通过矩阵运算和拉普拉斯逆变换求出时域的状态变量和输出。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

1. 求状态转移矩阵的拉普拉斯变换 $\Phi(s)$ ：

已知 $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ，其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$ ，则

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

2. 求输入的拉普拉斯变换 $\mathbf{F}(s)$ ：

已知 $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ e^{-3t}u(t) \end{bmatrix}$ ，由 $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ， $\mathcal{L}[e^{-3t}u(t)] = \frac{1}{s+3}$ ，得：

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

3. 求状态变量在频域的表达式 $\mathbf{X}(s)$ ：

由 $\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0^-) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)$ ， $\mathbf{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，代入计算可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-2)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} + \frac{0.7}{s-2} + \frac{1.5}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{0.2}{s+3} \\ -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} + \frac{0.7}{s-2} + \frac{1.5}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{0.2}{s+3} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 求输出在频域的表达式 $\mathbf{Y}(s)$:

根据输出方程的拉普拉斯变换 $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{F}(s)$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

代入 $\mathbf{X}(s)$ 和 $\mathbf{F}(s)$ 进行计算得到 $\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$ 的表达式:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s \\ 1/(s+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.7}{s-2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1.5}{s} - \frac{0.2}{s+3} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}.$$

5. 求状态变量和输出在时域的表达式:

对 $\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$ 进行拉普拉斯逆变换, 得到

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7e^{2t} + 2e^{-t} - 0.2e^{-3t} - 1.5 \\ 1 - 2e^{-t} \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7e^{2t} - 0.2e^{-3t} + 0.5 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} u(t).$$

2.4.2 结果分析

通过上述步骤, 成功求解出系统的状态变量和输出在时域的表达式。这些结果反映了系统在给定初始状态和输入条件下的动态响应。例如, 状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的表达式展示了系统内部状态随时间的变化情况, 输出 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的表达式则反映了系统对外的输出特性。通过分析这些结果, 可以判断系统的稳定性(如是否存在指数增长项)、响应速度(指数项的系数和指数)等性能指标。同时, 这些结果也可以通过与理论预期或实验数据进行对比来进一步验证其准确性。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

1. **控制系统设计:** 在控制系统设计中, 可以根据系统的状态变量和输出结果来调整控制器参数, 以实现更好的控制性能。例如通过调整控制器的增益, 使得系统的输出能够更快地跟

踪期望的目标值，或者增强系统的稳定性。

2. 故障诊断：在实际运行的系统中，通过监测系统的状态变量和输出，可以判断系统是否出现故障。如果状态变量或输出的变化偏离了正常范围，可能意味着系统中某个部件出现故障，从而可以及时进行故障诊断和修复。

3. 信号处理：在信号处理领域，LTI系统的分析方法可以用于滤波、降噪等操作。例如设计一个LTI滤波器，通过求解其状态变量和输出，可以优化滤波器的性能，提高信号的质量。

2.5.2 反思总结

1. 模型局限性：本案例中的模型假设系统是线性时不变的，但在实际应用中，很多系统可能存在非线性或时变的特性，此时该模型可能无法准确描述系统的行为，需要采用更复杂的非线性或时变系统分析方法。

2. 参数敏感性：系统的响应结果对模型中的参数（如矩阵 A 、 B 、 C 、 D 的元素以及初始状态和输入的参数）较为敏感。在实际应用中，需要准确确定这些参数的值，并且考虑参数的不确定性对系统响应的影响，可能需要进行参数估计和不确定性分析。

3. 计算效率：在处理大规模系统或复杂输入时，求解状态变量和输出的计算量可能较大。可以通过优化算法（如采用更高效的矩阵运算方法）、利用数值计算软件的优化功能等方式来提高计算效率，满足实时性要求较高的应用场景。

案例3 拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

拉普拉斯变换是一种在工程数学领域广泛应用的积分变换，它在求解线性时不变（LTI）系统的微分方程方面具有重要作用。在众多工程专业中，如电气工程、自动化控制等，经常会遇到描述系统动态行为的微分方程。例如在电路分析中，电容、电感等元件的电压电流关系往往通过微分方程来描述；在控制系统中，被控对象的动态特性也可以用微分方程建模。利用拉普拉斯变换可以将时域中的微分方程转换为复频域中的代数方程，从而简化求解过程。

3.1.2 应用目标

通过本案例，旨在让相关专业的学生掌握拉普拉斯变换及其性质（线性性、微分性等）在求解微分方程中的具体应用。对于问题1，能够准确求出系统的零输入响应、零状态响应和完全响应，从而深入理解系统在不同初始条件和输入下的动态行为；对于问题2，掌握求解系统频率响应和冲激响应的方法，这对于分析电路系统的频率特性和瞬态响应至关重要，有助于在实际工程设计中优化电路性能、选择合适的元件参数等。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

问题1描述： 已知描述某因果连续时间LTI系统的微分方程为

$$y'' + 3y' + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t), \quad (t \geq 0), \quad y(0^-) = -2, \quad y'(0^-) = 3, \quad f(t) = u(t).$$

求解该系统的零输入响应 $y_x(t)$ 、零状态响应 $y_f(t)$ 和完全响应 $y(t)$ 。

问题2描述： 对于一阶RC电路系统（如图3.20），激励电压源为 $f(t)$ ，输出电压 $y(t)$ 为电容两端的电压 $v_c(t)$ ，电路初始状态为零。求解系统的频率响应 $H(j\omega)$ 和冲激响应 $h(t)$ 。

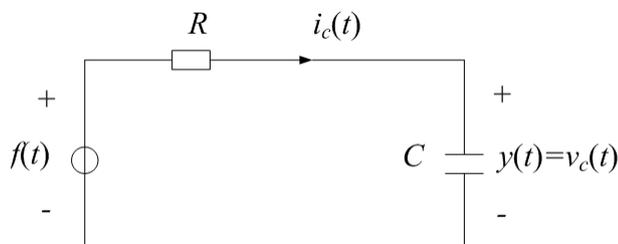


图3.20: 一阶RC电路图

3.2.2 需求分析

问题1需求分析： 从数学角度看，需要熟练掌握拉普拉斯变换的线性性

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

和微分性

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-),$$

以及拉普拉斯逆变换的求解方法。在实际应用中，准确求解这些响应对于分析系统的性能至关重要。例如在控制系统中，零输入响应反映了系统初始状态对系统输出的影响，零状态响应反映了系统对输入信号的响应特性，完全响应则是两者的综合，通过分析这些响应可以判断系统的稳定性、响应速度等性能指标。

问题2需求分析： 在这个问题中，需要理解电路的基本原理，以及频率响应和冲激响应的概念。频率响应描述了系统对不同频率正弦输入信号的响应特性，冲激响应则反映了系统在单位冲激信号作用下的输出特性。求解这两个响应需要运用拉普拉斯变换以及电路元件的伏安特性（如电容的 $i = C \frac{dv}{dt}$ ，电阻的 $v = Ri$ ）等知识。在实际电路设计中，频率响应和冲激响应对于滤波器设计、信号传输与处理等方面具有重要指导意义，例如设计一个低通滤波器时，需要根据频率响应来确定滤波器的截止频率等参数。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题1建模与方法

1. 零输入响应建模：零输入响应是仅由初始状态引起的响应，此时令输入 $f(t) = 0$ ，则微分方程变为

$$y_x'' + 3y_x' + 2y_x(t) = 0.$$

对其进行拉普拉斯变换，利用拉普拉斯变换的微分性得到关于 $Y_x(s)$ 的代数方程，进而求解 $Y_x(s)$ ，再通过拉普拉斯逆变换得到 $y_x(t)$ 。

2. 零状态响应建模：零状态响应是仅由输入信号引起的响应，令初始状态 $y(0^-) = 0$ ， $y'(0^-) = 0$ 。对原微分方程进行拉普拉斯变换，利用拉普拉斯变换的线性性和微分性，结合输入 $f(t) = u(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s) = \frac{1}{s}$ ，得到关于 $Y_f(s)$ 的代数方程，求解 $Y_f(s)$ 后通过拉普拉斯逆变换得到 $y_f(t)$ 。

3. 完全响应建模：完全响应 $y(t)$ 等于零输入响应 $y_x(t)$ 和零状态响应 $y_f(t)$ 之和，即

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t).$$

3.3.2 问题2建模与方法

1. 根据电路原理建模：根据电容和电阻的伏安特性以及基尔霍夫定律，列出电路的微分方程。对于一阶RC电路，有

$$f(t) = Ri_c(t) + v_c(t),$$

又因为 $i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$ ，所以

$$f(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t),$$

即 $f(t) = RCy'(t) + y(t)$ 。

2. 求解频率响应：对上述微分方程进行拉普拉斯变换，得到

$$F(s) = (RCs + 1)Y(s),$$

则频率响应

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{RCs + 1},$$

将 $s = j\omega$ 代入 $H(s)$ 得到

$$H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}.$$

3. 求解冲激响应：先求出系统的传递函数 $H(s)$ ，然后对 $H(s)$ 进行拉普拉斯逆变换，得到冲激响应 $h(t)$ 。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 问题求解

问题1求解：

1. 零输入响应求解：对 $y_x'' + 3y_x' + 2y_x(t) = 0$ 进行拉普拉斯变换，根据微分性有

$$s^2 Y_x(s) - s y_x(0^-) - y_x'(0^-) + 3(s Y_x(s) - y_x(0^-)) + 2 Y_x(s) = 0,$$

将 $y_x(0^-) = -2$ ， $y_x'(0^-) = 3$ 代入可得：

$$s^2 Y_x(s) + 2s - 3 + 3(s Y_x(s) + 2) + 2 Y_x(s) = 0$$

整理得到

$$Y_x(s) = \frac{-2s - 3}{(s + 1)(s + 2)}.$$

利用部分分式分解并进行拉普拉斯逆变换，得到

$$y_x(t) = -e^{-t} - e^{-2t}, \quad (t \geq 0).$$

2. 零状态响应求解：对方程 $y'' + 3y' + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t)$ 进行拉普拉斯变换，得

$$s^2 Y_f(s) - s y(0^-) - y'(0^-) + 3(s Y_f(s) - y(0^-)) + 2 Y_f(s) = 4 \times 1 + 3 \times \frac{1}{s}$$

整理得到

$$(s^2 + 3s + 2) Y_f(s) = 4 + \frac{3}{s} + s y(0^-) + y'(0^-) + 3 y(0^-)$$

将 $y(0^-) = 0$ ， $y'(0^-) = 0$ 代入并化简，得到

$$Y_f(s) = \frac{4s + 3}{s(s + 1)(s + 2)},$$

利用部分分式分解并进行拉普拉斯逆变换，得到

$$y_f(t) = \frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-2t}, \quad (t \geq 0).$$

3. 完全响应求解：由公式 $y(t) = y_x(t) + y_f(t)$ ，得系统的完全响应为

$$y(t) = -e^{-t} - e^{-2t} + \frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-2t} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} e^{-2t}, \quad (t \geq 0).$$

问题2求解:

1. 频率响应求解: 由 $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$, 将 $s = j\omega$ 代入, 得到

$$H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1},$$

它描述了系统对不同频率正弦输入信号的幅度和相位变化情况。

2. 冲激响应求解: 对 $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$ 进行拉普拉斯逆变换, 查拉普拉斯变换表得

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t),$$

它表示系统在单位冲激信号作用下的输出随时间的变化情况。

3.4.2 结果分析

问题1:

零输入响应: $y_x(t) = -e^{-t} - e^{-2t}$, ($t \geq 0$), 反映了系统初始状态对输出的影响, 随着时间推移, 响应逐渐衰减。

零状态响应: $y_f(t) = \frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$, ($t \geq 0$), 体现了系统对单位阶跃输入 $u(t)$ 的响应特性, 最终会趋近于一个稳态值 2。

完全响应: $y(t) = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}e^{-2t}$, ($t \geq 0$) 是两者的综合, 通过分析这些响应的表达式, 可以判断系统是稳定的, 因为响应中没有随时间增长而发散的项。

问题2:

频率响应: $H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega+1}$, 其幅度随频率 ω 的增加而减小, 具有低通滤波特性, 可用于设计低通滤波器等电路。

冲激响应: $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$, 反映了系统在受到单位冲激信号时的瞬态响应情况, 其衰减速度由 RC 时间常数决定, RC 越小, 响应衰减越快。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

1. 控制系统: 在控制系统中, 拉普拉斯变换求解微分方程的方法可用于分析和设计控制器。例如在设计PID控制器时, 通过对系统微分方程进行拉普拉斯变换, 分析系统的传递函数, 从而确定合适的比例、积分和微分系数, 以实现对被控对象的精确控制。

2. 信号处理：在信号处理领域，可用于滤波、信号恢复等操作。如设计一个滤波器去除信号中的噪声，通过分析滤波器的频率响应和冲激响应，优化滤波器的参数，提高滤波效果。

3. 机械系统：在机械工程中，许多机械系统的动态行为也可以用微分方程描述，如弹簧-质量-阻尼系统。利用拉普拉斯变换求解这些微分方程，可以分析系统的振动特性、稳定性等，为机械系统的设计和优化提供理论支持。

3.5.2 反思总结

1. 模型局限性：拉普拉斯变换适用于线性时不变系统，对于非线性或时变系统，该方法不再适用，可采用其他的分析方法，如非线性系统的相平面分析、时变系统的变参数法等。

2. 初始条件和参数影响：系统的响应结果对初始条件和模型参数非常敏感。在实际应用中，准确确定初始条件和参数至关重要，并且需要考虑参数的不确定性对系统响应的影响，可能需要进行参数估计和误差分析。

3. 计算复杂性：对于高阶微分方程或复杂系统，拉普拉斯变换后的代数方程求解可能会变得复杂，需要运用更高效的数值计算方法或借助专业软件工具来简化计算过程，提高计算效率和准确性。

案例4 复积分的物理意义——环量和通量

4.1 背景简介与应用目标

4.1.1 背景简介

复积分是复变函数论的核心工具，其物理意义可通过“场论中的环量与通量”直观诠释。在电磁学等领域，向量场的“环量”（速度场沿闭合路径的线积分）和“通量”（向量场通过曲线的流量）是描述场特性的关键量，而复积分的实部、虚部可分别对应环量与通量，为场的分析提供数学桥梁。

4.1.2 应用目标

以“二维静电场（点电荷的场）”为载体，揭示复积分 $\oint_C \frac{dz}{z-z_0}$ 与电场强度 \vec{E} 的环量、通量的对应关系，帮助学习者理解复积分的物理本质，掌握“复变函数工具与场论物理量”的关联逻辑。

4.2 问题描述与需求分析

4.2.1 问题描述

给定复平面上 z_0 点有电量为 $2\pi\epsilon$ 的点电荷，形成二维静电场，场强 $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ （ \vec{r} 为位置向量， r 为到 z_0 的距离）。请分析：

- (1) 复积分 $\oint_C \frac{dz}{z-z_0}$ 与电场强度 \vec{E} 的环量（ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ）、通量（ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{n}$ ）的关系；
- (2) 闭合曲线 C 包含或不包含 z_0 时，复积分、环量、通量的结果差异。

4.2.2 需求分析

需要将复积分分解为实部与虚部，结合场论中“环量（线积分）”和“通量（面积分相

关)”的定义，建立复积分与物理量的对应，进而解释复积分结果（0 或 $2\pi i$ ）的物理意义。

4.3 问题建模与方法选择

4.3.1 问题建模

复函数与向量场的关联：

设复函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，定义二维向量场 $\vec{A} = \overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ ；

闭合曲线 C 上的微分 $dz = dx + idy$ ，其共轭 $d\bar{z} = dy - idx$ ，

\vec{l} 为切向单位向量， \vec{n} 为法向单位向量。

复积分的实虚部分解：复积分 $\oint_C f(z)dz$ 可展开为：

$$\oint_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \oint_C [udx - vdy] + i \oint_C [vdx + udy]$$

其中，实部 $\oint_C (udx - vdy)$ 对应向量场 \vec{A} 沿 C 的环量（ $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ ），虚部 $\oint_C (vdx + udy)$ 对应 \vec{A} 通过 C 的通量（ $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{n}$ ）。

电场与复积分的对应：点电荷的电场强度 \vec{E} 分量为

$$E_x = \frac{x - x_0}{r^2}, E_y = \frac{y - y_0}{r^2}, \quad \frac{1}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{r^2} - i \frac{y - y_0}{r^2},$$

因此 $\frac{1}{z - z_0}$ 与 \vec{E} 直接对应（实部为 E_x ，虚部为 $-E_y$ ）。

4.3.2 方法选择

采用复积分分解法与场论物理量定义，将复积分的“代数运算”转化为“场的环量、通量的物理分析”，结合“电场的无旋性（环量为0）”与“点电荷的通量特性（包含源点时通量为 2π ）”，推导复积分结果。

4.4 模型求解与结果分析

4.4.1 模型求解

1.复积分与电场环量的关系：

电场强度 \vec{E} 是无旋场（ $\nabla \times \vec{E} = 0$ ），因此沿任意闭合曲线 C 的环量 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。

由于复积分 $\oint_C \frac{dz}{z - z_0}$ 的实部对应 \vec{E} 的环量，故实部为0。

2.复积分与电场通量的关系：

若 C 不包含 z_0 （点电荷所在点），电场的“无源性”（ $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，除源点外）导致通量 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{n} = 0$ ；

若 C 包含 z_0 ，根据高斯定理（二维情形），通量 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{n} = 2\pi$ 。

复积分 $\oint_C \frac{dz}{z-z_0}$ 的虚部对应 \vec{E} 的通量（符号调整后），因此：

$$\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 0, & C \text{ 不包含 } z_0 \\ 2\pi i, & C \text{ 包含 } z_0 \end{cases}$$

4.4.2 结果分析

复积分的物理本质：复积分 $\oint_C \frac{dz}{z-z_0}$ 是“二维静电场通量”的复表示——虚部反映了电场通过闭合曲线的通量，实部反映环量（因电场无旋，实部为0）。

源点的影响：点电荷作为“场的源”，当闭合曲线包含源点时，通量不为0（体现“源的存在导致场的通量集中”）；不包含时，通量为0（体现“无源性区域的通量守恒”），复积分结果直接刻画了这一源场关系。

4.5 应用扩展与反思总结

4.5.1 应用扩展

跨领域场分析：复积分的环量、通量思想可推广到流体力学（速度场的环量与流量）、热传导（温度梯度场的热流量）等领域，只要存在“向量场与闭合路径的相互作用”，复积分均可作为分析工具。

理论深化：柯西积分公式、留数定理等复分析核心结论，其物理本质均可通过“环量、通量”诠释（如留数对应“源的强度”），为复变函数的“抽象定理”提供直观的物理图像。

4.5.2 反思总结

数学与物理的融合：复积分不再是“纯代数运算”，而是“场的环量、通量的数学编码”，体现了数学工具与物理现象的深度融合——数学为物理提供精确描述的语言，物理为数学赋予直观的现实意义。

模型的普适性与局限性：该模型成功将“二维场”与复积分关联，但对“三维场”需拓展为复变函数与矢量分析的结合（如用亥姆霍兹分解）；不过，“环量-通量-复积分分量”的对应逻辑，为高维场的数学建模提供了启发，反映了“从特殊到一般”的科学研究思路。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《数值计算方法》 课程应用案例库

案例1 拉格朗日插值应用案例I

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在许多实际问题中，我们常常需要根据有限的离散数据来推断连续的函数关系。拉格朗日插值是数值分析中的一种重要方法，用于在已知若干离散点数据的情况下，构造一个多项式函数来近似描述这些点所代表的函数关系。在地理、气象等领域，经常会遇到根据有限时间点的观测数据来推断整个时间段内的变化情况，如本案例中根据特定日期的日出日落时间数据来分析日照时间的变化规律。

1.1.2 应用目标

通过本案例，旨在利用拉格朗日插值法根据给定的某地区夏季特定日期的日出日落时间数据，构建日照时间关于日期的函数模型，进而找出在给定时间段内日照时间最长的日期。这对于农业生产（合理安排农事活动）、旅游规划（确定最佳旅游观赏时间）等实际应用具有一定的指导意义，同时也帮助相关专业人员（如地理、气象专业）更好地理解和应用拉格朗日插值这一数学工具。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

根据资料记载，某地区某年夏季时节间隔30天的日出日落时间数据如下：

时间	5月1日	5月31日	6月30日
日出	5:51	5:17	5:10
日落	19:04	19:38	19:50

由已知数据推算在5月1日到6月30日这段时间内，哪一天的日照时间最长？

1.2.2 需求分析

从数学角度看，需要掌握拉格朗日插值法的原理和计算方法。拉格朗日插值法要求根据给定的离散点数据，构造出满足在这些点上取值与已知数据相同的插值多项式。在实际应用中，准确构建插值多项式并通过其求解最大值至关重要。如果插值多项式构建错误，将导致后续计算出的最长日照时间对应的日期不准确，从而影响相关决策的制定，如农业生产中根据日照时间安排作物种植计划等。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

1. **数据处理**：将日期和日照时间进行数值化处理，把5月1日、5月31日、6月30日分别记为时间 $x = 1$ 、 $x = 31$ 、 $x = 61$ ，日照时间通过（日落时间-日出时间） $\times 60$ 计算得到，分别为 $y_0 = 793$ 、 $y_1 = 861$ 、 $y_2 = 880$ ，列表如下：

时间(x)	1	31	61
日照时间(y)	793	861	880

2. **构建插值多项式模型**：设插值多项式为

$$P_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2,$$

其中 $l_i(x)$ 为拉格朗日基函数，满足： $P_2(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2$)。

1.3.2 方法选择

选择拉格朗日插值法来构建日照时间关于日期的函数模型。拉格朗日插值法通过构造特定的基函数，能够方便地根据已知离散点数据构建出插值多项式，该多项式在已知点上与实际数据吻合，从而可以用于推断未知点的函数值。对于本问题，利用拉格朗日插值法构建的二次插值多项式可以较好地近似日照时间随日期的变化关系，进而求解最大值。

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

1. 计算拉格朗日基函数：

$$l_0(x) = \frac{(x-31)(x-61)}{(1-31)(1-61)} = \frac{1}{1800}x^2 - \frac{23}{450}x + \frac{1891}{1800}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-61)}{(31-1)(31-61)} = -\frac{1}{900}x^2 + \frac{31}{450}x - \frac{61}{900}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-31)}{(61-1)(61-31)} = \frac{1}{1800}x^2 - \frac{4}{225}x + \frac{31}{1800}$$

2. 构建二次插值函数：将 $y_0 = 793$ 、 $y_1 = 861$ 、 $y_2 = 880$ 代入

$$P_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2,$$

得到

$$P_2(x) = -0.0272x^2 + 3.1378x + 789.8894.$$

3. 求最大值：对 $P_2(x)$ 求导，令 $P_2'(x) = 0$ ，得

$$-0.0544x + 3.1378 = 0,$$

解出 $x = 57.6327$ （分钟）。根据实际问题，确定此值对应的日期为6月28日，即为最长日照时间对应的日期。

1.4.2 结果分析

通过拉格朗日插值法成功构建了日照时间关于日期的二次函数模型，并求出了在给定时间段内日照时间最长的日期为6月28日。该结果具有一定的实际意义，例如在农业生产中，农民可以根据这个结果合理安排作物的种植和管理时间，充分利用较长的日照时间促进作物生长；在旅游领域，相关部门可以根据此结果向游客推荐日照较好的日期进行户外活动等。同时，该结果也验证了拉格朗日插值法在解决此类根据离散数据推断连续函数特性问题上的有效性。但需要注意的是，拉格朗日插值法构建的模型是基于有限的离散数据，其准确性受到数据点数量和分布的影响，如果数据点过少或分布不合理，可能会导致模型与实际情况存在偏差。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

1. **气象预测**：除日照时间，在气象领域还可利用拉格朗日插值法根据有限时间点的气温、降水量等数据，构建函数模型来预测某段时间内的天气变化趋势，为气象预报提供参考。

2. **经济数据分析**：在经济学中，对于一些离散的经济数据（如特定时间点的股票价格、商品销售额等），可以通过拉格朗日插值法构建模型，分析数据的变化规律，辅助投资决策和市场趋势判断。

3. **生物科学**：在生物实验中，根据不同时间点测量的生物生长指标（如植物的高度、动物的体重等），利用拉格朗日插值法构建生长模型，研究生物的生长规律，为生物研究和农业生产提供理论支持。

1.5.2 反思总结

1. **方法局限性**：拉格朗日插值法虽然能够根据离散数据构建插值多项式，但存在龙格现象，即在插值区间的端点附近可能会出现较大的误差。对于高阶插值，这种现象更为明显。因此，在实际应用中，需要根据数据特点和问题要求合理选择插值多项式的次数，或者结合其他插值方法（如牛顿插值法）来提高插值的准确性。

2. **数据依赖性**：插值结果的准确性高度依赖于已知数据点的数量和分布。如果数据点过少，可能无法准确反映函数的真实变化趋势；如果数据点分布不均匀，也可能导致插值误差增大。在实际应用中，应尽量获取更多、分布更合理的数据点，以提高模型的可靠性。

3. **模型验证**：使用拉格朗日插值法构建的模型需要进行验证和评估。可以通过与实际观测数据对比、进行误差分析等方式，检验模型的准确性和适用性。同时，还可以结合其他数学方法或实际经验对模型进行优化和改进，以更好地满足实际应用的需求。

案例2 拉格朗日插值应用案例II

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

在经济学和市场分析领域，常常需要研究不同变量之间的关系，例如商品的产量和价格之间的关联。拉格朗日插值是数值分析中的重要工具，可用于根据有限的离散数据点构建函数关系，从而对未知点的函数值进行估计。在实际的市场研究中，获取的数据往往是离散的时间点上的观测值，通过拉格朗日插值可以在一定程度上推断出其他产量下对应的价格情况，为市场预测和政策制定提供参考。

2.1.2 应用目标

本案例旨在运用拉格朗日插值法，根据某城市1993年、1995年、1997年猪肉产量和价格的离散数据，构建产量与价格之间的函数关系模型，进而推测1999年当猪肉产量达到27.5万吨时的猪肉价格。这有助于政府和相关企业了解市场价格动态，为制定合理的政策和生产销售策略提供依据，例如政府可以根据预测价格调整对养猪产业的补贴政策，企业可以合理安排生产规模。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

猪肉产量和价格的关系是很直接的，据统计某城市1993年、1995年、1997年的猪肉产量和价格如下表所示：

时间	1993年	1995年	1997年
产量 x (万吨)	28	27.28	27.021
价格 y (元/千克)	6.8	7.09	7.19

市政府调整政策后，1999年猪肉产量有希望达到27.5万吨，试推测1999年猪肉价格为多少？

2.2.2 需求分析

从数学角度看，需要深入理解拉格朗日插值法的原理和计算过程。拉格朗日插值法要求根据给定的离散数据点构造插值多项式，使得该多项式在已知数据点上与实际数据相符。在实际应用中，准确构建插值多项式并利用其进行预测至关重要。若插值多项式构建错误，将导致对猪肉价格的预测不准确，进而影响政府政策制定和企业决策，如政府可能会因错误的价格预测而制定不合理的补贴标准，企业可能会因误判价格而造成生产和销售的损失。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.1 问题建模

1. **数据整理**：将1993年、1995年、1997年的猪肉产量分别记为 $x_0 = 28$ 、 $x_1 = 27.28$ 、 $x_2 = 27.021$ ，对应的价格分别记为 $y_0 = 6.8$ 、 $y_1 = 7.09$ 、 $y_2 = 7.19$ 。

2. **构建插值多项式模型**：设插值多项式为

$$P_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2,$$

其中 $l_i(x)$ 为拉格朗日基函数，满足 $P_2(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2$)。

2.3.2 方法选择

选择拉格朗日插值法来构建猪肉产量与价格之间的函数关系模型。拉格朗日插值法能够根据有限的离散数据点，通过构造特定的基函数，方便地构建出插值多项式。该多项式在已知数据点上与实际数据吻合，从而可以用于推断其他产量对应的价格。对于本案例，利用拉格朗日插值法构建的二次插值多项式可以近似描述猪肉产量和价格之间的关系，进而实现对特定产量下价格的预测。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

1. 计算拉格朗日基函数：

$$l_0(x) = \frac{(x - 27.28)(x - 27.021)}{(28 - 27.28)(28 - 27.021)} = 1.4187x^2 - 77.0358x + 1045.7566$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 28)(x - 27.021)}{(27.28 - 28)(27.28 - 27.021)} = -5.3625x^2 + 295.0504x - 4057.2072$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 28)(x - 27.28)}{(27.021 - 28)(27.021 - 27.28)} = 3.9438x^2 - 218.0146x + 3012.4507$$

2. 构建二次插值函数：将 $y_0 = 6.8$ 、 $y_1 = 7.09$ 、 $y_2 = 7.19$ 代入

$$P_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2,$$

得到

$$P_2(x) = -0.017043x^2 + 0.538922x + 5.066365.$$

3. 预测价格：将 $x = 27.5$ 代入 $P_2(x)$ ，解得 $y = 7.00$ （元/千克），即推测1999年猪肉价格为7.00元每千克。

2.4.2 结果分析

本案例通过拉格朗日插值法成功构建了猪肉产量与价格之间的二次函数模型，并据此推测出1999年猪肉产量为27.5万吨时的价格为7.00元/千克。该结果为政府和企业提供了一定的参考依据，例如政府在制定相关产业政策时可以考虑该价格水平对市场的影响，企业可以根据预测价格调整生产和销售计划。然而，需要注意的是，拉格朗日插值法构建的模型存在一定局限性，其准确性依赖于已知数据点的数量和分布情况。本案例中仅使用了三个数据点，可能无法完全准确地反映产量和价格之间复杂的实际关系，在实际应用中需要结合更多因素进行综合判断。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

1. 其他农产品市场分析：拉格朗日插值法可用于分析其他农产品（如粮食、蔬菜等）的产量和价格关系，帮助农民和农业企业制定生产和销售策略，政府制定合理的农业补贴和调控

政策。

2. 工业产品市场：在工业领域，对于一些产品的产量和价格、成本和产量等关系的研究，也可以运用拉格朗日插值法进行分析预测，辅助企业进行生产决策和成本控制，例如汽车制造企业根据产量预测成本和价格走势。

3. 金融市场：在金融市场中，可利用拉格朗日插值法对股票价格、汇率等随时间变化的数据进行分析和预测，帮助投资者制定投资策略，金融机构进行风险管理。

2.5.2 反思总结

1. 方法局限性：拉格朗日插值法存在龙格现象，即当插值节点增多时，在插值区间端点附近可能会出现较大误差，导致插值函数与实际函数偏差较大。在实际应用中，需要合理选择插值节点的数量和分布，或者结合其他插值方法（如牛顿插值法）来提高插值的准确性。

2. 数据依赖性：插值结果的准确性高度依赖于已知数据的质量和数量。若数据存在误差或者数据点过少，可能会导致构建的插值模型与实际情况偏差较大。在实际应用中，应尽量获取更多准确的数据，并对数据进行预处理和验证，以提高模型的可靠性。

3. 模型验证与优化：使用拉格朗日插值法构建的模型需要进行验证和优化。可以通过与实际市场数据对比、进行误差分析等方式检验模型的准确性，同时结合其他数学模型和市场理论对模型进行改进，以更好地适应复杂的市场环境。

案例3 最小二乘法的应用案例

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

在农业生产中，了解肥料施用量与农作物产量之间的关系至关重要。合理的施肥策略能够提高农作物产量，同时避免资源浪费和环境污染。最小二乘法是一种常用的数学方法，用于寻找数据的最佳拟合曲线或函数关系，在农业试验数据分析中具有广泛应用。通过最小二乘法可以建立肥料施用量与土豆产量之间的数学模型，为农业生产提供科学的施肥指导。

3.1.2 应用目标

本案例旨在利用最小二乘法，根据给定的氮肥、磷肥施用量与土豆产量的数据，分别建立土豆产量与氮肥施用量、土豆产量与磷肥施用量之间的关系式。通过建立这些关系式，能够帮助农民和农业生产者了解不同肥料施用量对土豆产量的影响，从而制定更合理的施肥计划，提高土豆产量和农业生产效益。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

在农业生产试验研究中，对某地区土豆的产量与化肥的关系做了实验，测得氮肥、磷肥的施放量与土豆产量的对应关系如下（单位： $100g/m^2$ ）：

氮肥施量	0	34	67	101	135	202	259	336	404	471
土豆产量	15.18	21.36	25.72	32.29	34.03	39.45	43.15	43.46	40.83	30.75
磷肥施量	0	24	49	73	98	147	196	245	294	342
土豆产量	33.46	32.47	36.06	37.96	41.04	40.09	41.26	42.17	40.36	42.73

根据上表数据分别给出土豆产量与氮、磷肥的关系式。

3.2.2 需求分析

从数学角度看，需要掌握最小二乘法的原理和计算方法。最小二乘法的目标是找到一组参数，使得拟合函数与实际数据之间的误差平方和最小。在实际应用中，准确建立模型对于农业生产决策至关重要。如果模型不准确，可能会导致农民施肥不当，既浪费肥料资源，又可能无法达到预期的产量目标。因此，需要仔细分析数据特点，选择合适的函数形式（如线性函数、二次函数等）进行拟合。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题建模

1. **氮肥施用量与土豆产量关系建模：** 观察氮肥施用量与土豆产量的数据点分布，初步判断二者关系接近二次函数（如图3.21）。

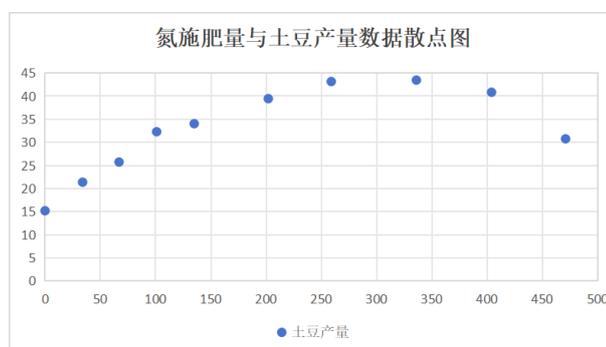


图3.21: 氮肥施用量与土豆产量数据散点图

故设拟合多项式为 $\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ ，其中 x 为氮肥施用量， $\varphi(x)$ 为对应的土豆产量预测值。2. **磷肥施用量与土豆产量关系建模：** 观察磷肥施用量与土豆产量的数据点分布，发现从0到98、从98到342之间分别呈明显的线性关系（如图3.22）。

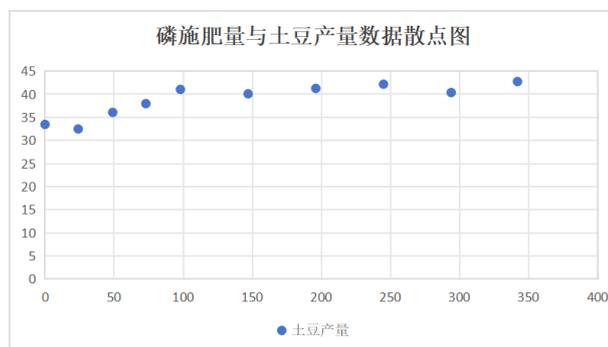


图3.22: 氮肥施用量与土豆产量数据散点图

因此，将数据分为两段进行线性拟合。

前五个点（磷肥施用量0到98）：设线性拟合函数为 $\varphi_1(x) = a_0 + a_1x$ ，其中 x 为磷肥施用量， $\varphi_1(x)$ 为对应的土豆产量预测值。

后六个点（磷肥施用量98到342）：设线性拟合函数为 $\varphi_2(x) = c_0 + c_1x$ ，其中 x 为磷肥施用量， $\varphi_2(x)$ 为对应的土豆产量预测值。

3.3.2 方法选择

选择最小二乘法进行建模。对于氮肥施用量与土豆产量的关系，使用二次多项式拟合；对于磷肥施用量与土豆产量的关系，根据数据特点采用分段线性拟合。最小二乘法能够通过最小化误差平方和，找到最适合数据的函数参数，从而建立准确的数学模型。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 氮肥施用量与土豆产量模型求解

1. 将氮肥施用量 x_i 和土豆产量 y_i 的数据代入 $\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ ，得到超定方程组：

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \times 0 + b_2 \times 0^2 = 15.18 \\ b_0 + b_1 \times 34 + b_2 \times 34^2 = 21.36 \\ b_0 + b_1 \times 67 + b_2 \times 67^2 = 25.72 \\ \dots \\ b_0 + b_1 \times 471 + b_2 \times 471^2 = 30.75 \end{cases}$$

2. 其正规方程为:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

其中 $n = 10$ (数据点个数)。计算可得:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2199 & 705703 \\ 2199 & 705703 & 23968041 \\ 705703 & 23968041 & 851799777 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 336.85 \\ 9533.58 \\ 2439259.83 \end{bmatrix}$$

3. 求解正规方程, 可得到 b_0 、 b_1 、 b_2 的值, 进而得到拟合函数 $\varphi(x)$ 。经计算 (此处计算过程可使用矩阵求逆等方法, 例如在MATLAB中可使用‘inv()’函数求逆):

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2199 & 705703 \\ 2199 & 705703 & 23968041 \\ 705703 & 23968041 & 851799777 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 336.85 \\ 9533.58 \\ 2439259.83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.7416 \\ 0.1973 \\ -0.0003 \end{bmatrix}$$

所以, 氮肥施用量与土豆产量的数据的二次拟合函数为

$$\varphi(x) = 14.7416 + 0.1973x - 0.0003x^2.$$

3.4.2 磷肥施用量与土豆产量模型求解

1. 前五个点的线性拟合: 将前五个磷肥施用量 x_{1i} 和土豆产量 y_{1i} 的数据代入 $\varphi_1(x) = a_0 + a_1x$, 得到超定方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \times 0 = 33.46 \\ a_0 + a_1 \times 24 = 32.47 \\ a_0 + a_1 \times 49 = 36.06 \\ a_0 + a_1 \times 73 = 37.96 \\ a_0 + a_1 \times 98 = 41.04 \end{cases}$$

其正规方程为:

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^5 x_{1i} \\ \sum_{i=1}^5 x_{1i} & \sum_{i=1}^5 x_{1i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 y_{1i} \\ \sum_{i=1}^5 x_{1i} y_{1i} \end{bmatrix}$$

计算可得：

$$\begin{bmatrix} 5 & 244 \\ 244 & 17910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 181.99 \\ 9338.2 \end{bmatrix}$$

求解正规方程（同样可使用矩阵求逆等方法）：

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 244 \\ 244 & 17910 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 181.99 \\ 9338.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.0771 \\ 0.0844 \end{bmatrix}$$

所以，前五个点的数据的拟合函数为

$$\varphi_1(x) = 32.0771 + 0.0844x.$$

2. 后六个点的线性拟合： 将后六个磷肥施用量 x_{2i} 和土豆产量 y_{2i} 的数据代入 $\varphi_2(x) = c_0 + c_1x$ ，得到超定方程组：

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \times 98 = 41.04 \\ c_0 + c_1 \times 147 = 40.09 \\ c_0 + c_1 \times 196 = 41.26 \\ c_0 + c_1 \times 245 = 42.17 \\ c_0 + c_1 \times 294 = 40.36 \\ c_0 + c_1 \times 342 = 42.73 \end{cases}$$

其正规方程为：

$$\begin{bmatrix} 6 & \sum_{i=1}^6 x_{2i} \\ \sum_{i=1}^6 x_{2i} & \sum_{i=1}^6 x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 y_{2i} \\ \sum_{i=1}^6 x_{2i}y_{2i} \end{bmatrix}$$

计算可得：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1322 \\ 1322 & 333054 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247.65 \\ 54813.26 \end{bmatrix}$$

求解正规方程：

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1322 \\ 1322 & 333054 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 247.65 \\ 54813.26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.9685 \\ 0.0059 \end{bmatrix}$$

所以，后六个点的数据的拟合函数为

$$\varphi_2(x) = 39.9685 + 0.0059x.$$

3.4.3 结果分析

1. 氮肥施用量与土豆产量关系：得到的二次拟合函数

$$\varphi(x) = 14.7416 + 0.1973x - 0.0003x^2$$

表明，土豆产量与氮肥施用量之间存在二次函数关系。在一定范围内，随着氮肥施用量的增加，土豆产量先增加，达到某个施用量后，产量会随着氮肥施用量的进一步增加而减少。这提示农民在施用氮肥时要注意适量，避免过量施肥导致产量下降。

2. 磷肥施用量与土豆产量关系：

前五个点的拟合函数 $\varphi_1(x) = 32.0771 + 0.0844x$ 说明，在磷肥施用量较低（0到98）的范围内，土豆产量随着磷肥施用量的增加而线性增加。

后六个点的拟合函数 $\varphi_2(x) = 39.9685 + 0.0059x$ 表明，在磷肥施用量较高（98到342）的范围内，土豆产量仍然随着磷肥施用量的增加而增加，但增加的速率明显变缓。这为农民在不同阶段合理施用磷肥提供了依据。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

1. 其他农作物研究：最小二乘法不仅可以用于研究土豆产量与肥料施用量的关系，还可以应用于其他农作物，如小麦、玉米、蔬菜等。通过建立相应的数学模型，为不同农作物的科学施肥提供指导，提高农作物的产量和质量。

2. 多因素综合分析：在实际农业生产中，农作物产量往往受到多种因素的影响，如土壤质地、气候条件、灌溉情况等。可以进一步扩展研究，将这些因素纳入模型中，通过多元回归分析等方法，建立更全面、准确的产量预测模型，为农业生产提供更有效的决策支持。

3. 肥料配方优化：根据建立的模型，可以进一步研究不同肥料之间的相互作用，优化肥料配方。例如，通过调整氮肥和磷肥的比例，寻找最佳的施肥组合，以提高土豆产量并降低生产成本。

3.5.2 反思总结

1. 模型局限性：本案例中建立的模型是基于给定的数据点进行拟合的，可能无法完全准确地反映实际生产中的复杂情况。例如，实际土壤条件可能存在空间变异性，不同地块的土壤

肥力和作物生长情况可能不同，而模型没有考虑这些因素。此外，模型假设肥料施用量与产量之间的关系是确定性的，但实际生产中存在许多随机因素，如病虫害、天气异常等，可能会影响模型的准确性。

2. 数据要求：模型的准确性依赖于数据的质量和数量。在实际应用中，应尽量收集更多、更准确的数据，包括不同地区、不同年份、不同土壤类型等条件下的数据，以提高模型的可靠性和通用性。同时，要注意数据的采集方法和精度，避免因数据误差导致模型偏差。

3. 模型验证与更新：建立的模型需要进行验证和更新。可以通过实际田间试验对模型进行验证，比较模型预测值与实际产量之间的差异。如果发现模型存在较大误差，需要进一步分析原因，调整模型或补充数据，以不断提高模型的准确性和实用性。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《大学物理》 课程应用案例库

案例1 磁矩在磁传感器中的应用案例

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在车辆工程以及传感器技术领域，磁传感器发挥着重要作用。磁矩在磁场中会受到力的作用，这一物理现象是磁传感器工作的基础。多晶铁磁材料具有各向异性磁电阻（AMR）特性，即其电阻率会随着磁矩与电流密度方向夹角的变化而改变。这种特性使得磁传感器能够检测微弱磁场或运行中的车辆产生的磁场变化，从而实现确定磁场方向以及车辆的检测等功能。

1.1.2 应用目标

本案例旨在通过讲解磁矩在磁传感器中的应用，让车辆工程专业学生理解磁矩方向与材料电阻之间的关系，掌握如何将磁信号转换为电信号，进而能够确定磁场方向，实现对车辆的检测。通过该案例，培养学生运用物理知识解决实际工程问题的能力，为其后续学习《汽车电器与电子系统》等专业课程以及从事相关工程实践奠定基础。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

通常，根据经验公式，多晶铁磁材料在电流密度 J 方向上的电阻率 ρ 满足

$$\rho = \rho_{\perp} + (\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}) \cos^2 \varphi_M,$$

其中 ρ_{\parallel} (ρ_{\perp}) 是磁矩 m 与 J 平行（垂直）时的电阻率， φ_M 是 m 与 J 方向的夹角。这一现象称为各向异性磁电阻（AMR）。由上式可以确定多晶铁磁体中AMR满足二重对称的角度依赖关系，如图1.23所示。人们习惯于将 $(\rho_{\parallel} - \rho_{\perp})/\rho_{\perp}$ 定义为AMR的比率。对于正常铁磁体来说，这一比率

基本在百分之零点几到百分之几之间。但这已经足够做成传感器去确定微弱磁场或运行中的车辆。这是因为微弱磁场或者运行中的车辆都会在传感器中产生一定的磁感应强度 \mathbf{B} ，该磁感应强度 \mathbf{B} 会扰动磁矩 \mathbf{m} 的方向，进而改变其电阻率 ρ 的大小。

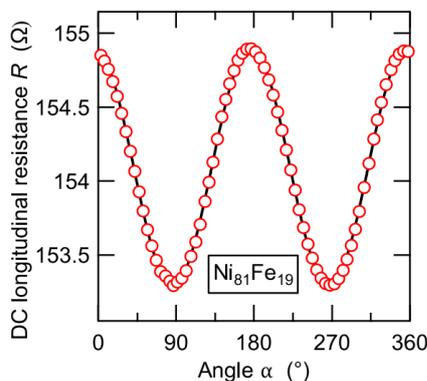


图1.23: $Ni_{81}Fe_{19}$ 多晶薄膜的AMR

例题：已知某一路段设置了两个以AMR为主的磁传感器，间距为100 m。一辆汽车在通过该路段时，10 s内两个传感器先后发生了电信号的剧烈变化，问这辆汽车的时速是多少？

1.2.2 需求分析

从知识层面看，学生需要理解磁矩、磁场、电阻率等物理概念，以及它们之间的相互关系。在应用方面，学生要能够将所学的物理原理应用到实际问题中，如通过分析电阻率的变化来检测车辆。对于求解汽车时速的问题，需要准确理解传感器间距和信号变化时间与汽车速度的关系。如果对这些概念和关系理解不透彻，将无法准确解释磁传感器的工作原理，也无法正确计算汽车的速度，进而影响对相关专业知识的掌握和工程实践能力的培养。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

1. 磁传感器工作原理建模：根据多晶铁磁材料的AMR特性，建立电阻率 ρ 与磁矩 m 和电流密度 J 夹角 φ_M 的数学模型

$$\rho = \rho_{\parallel} + (\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}) \cos^2 \varphi_M.$$

当微弱磁场或运行中的车辆产生的磁感应强度 B 扰动磁矩 m 的方向时， φ_M 发生变化，导致电阻率 ρ 改变，从而引起电信号变化，以此实现对磁场或车辆的检测。

2. 汽车速度建模：将汽车通过两个传感器的过程视为匀速直线运动模型，已知两个传感器间距 $s = 100m$ （路程），以及两个传感器先后发生电信号剧烈变化的时间间隔 $t = 10s$ （时间），根据速度的定义建立 $v = s/t$ 的模型来求解汽车速度。

1.3.2 方法选择

对于磁传感器工作原理的分析，采用基于物理原理的数学建模方法，通过建立电阻率与角度的函数关系来解释磁信号到电信号的转换。对于汽车速度的求解，选择匀速直线运动的速度计算公式，这是物理学中处理此类问题的基本方法，简单直接且符合该问题的实际情况。

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

1. **磁传感器工作原理解释：**当微弱磁场或车辆产生的磁场作用于磁传感器中的多晶铁磁材料时，磁场会使磁矩 m 的方向发生改变，导致 φ_M 变化。根据 $\rho = \rho_{\parallel} + (\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}) \cos^2 \varphi_M$ ， φ_M 的变化会引起电阻率 ρ 的变化，而电阻 R 与电阻率 ρ 相关（ $R = \rho l/S$ ， l 为材料长度， S 为横截面积），电阻的变化会导致电信号（如电压、电流等）发生变化，从而实现了对磁场或车辆的检测。

2. **汽车速度计算：**已知 $s = 100m$ ， $t = 10s$ ，则 $v = s/t = 100/10 = 10m/s = 36km/h$ 。

1.4.2 结果分析

1. **磁传感器工作原理方面：**通过建立的模型能够清晰地解释磁传感器如何利用多晶铁磁材料的AMR特性实现对磁场或车辆的检测。这一原理在实际应用中具有重要意义，例如在智能交通系统中，可以用于车辆的自动检测和计数，为交通流量监测提供技术支持。

2. **汽车速度计算方面：**计算得出汽车时速为 $36km/h$ ，该结果符合实际情况的初步预期。这种计算方法简单明了，在实际交通管理中，可以通过设置多个磁传感器来实时监测车辆速度，判断车辆是否超速，从而保障交通安全。同时，该计算过程也让学生巩固了匀速直线运动速度计算的物理知识。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

1. **交通领域拓展：**除了检测车辆速度和计数，磁传感器还可以用于停车场管理系统，通过检测车辆进出时磁信号的变化，实现自动计费和车位管理。在高速公路收费系统中，也可以利用磁传感器来识别车辆，实现不停车收费（ETC）功能的辅助检测，提高收费效率。

2. **工业与科研领域：**在工业生产中，磁传感器可以用于检测磁性材料的加工过程，如监测磁性零件的位置和运动状态，保障生产的准确性和稳定性。在科研领域，可用于研究地球磁场的变化，通过布置多个磁传感器，监测地球磁场的微弱变化，为地质研究和空间物理研究提供数据支持。

1.5.2 反思总结

1. **知识融合方面：**本案例融合了物理学中磁学和电学的知识，以及数学建模的方法。在教学过程中，应注重引导学生跨学科思考，加强不同学科知识之间的联系，提高学生综合运用知识的能力。例如，可以进一步拓展相关物理原理，让学生理解更复杂的磁电转换机制。

2. **实际应用局限性：**虽然磁传感器在检测车辆等方面有一定应用，但也存在局限性。例如，环境中的其他磁场干扰可能会影响磁传感器的检测准确性，在实际应用中需要采取抗干扰措施，如采用屏蔽技术或优化传感器的设计。此外，对于非磁性车辆或磁性较弱的物体，检测效果可能不佳，需要进一步研究改进检测方法或结合其他传感器技术。

3. **模型简化与实际情况差异：**在计算汽车速度时，采用了匀速直线运动模型，这是对实际情况的简化。实际中汽车可能存在加速、减速或转弯等情况，后续可以引导学生考虑更复杂的运动模型，提高模型的准确性和适用性，培养学生对实际问题的深入分析能力。

案例2 光的偏振在电磁波极化方面的应用案例

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

在通信与电信专业的《电磁场与电磁波》课程体系中，光的偏振及电磁波极化是重要的基础知识点。光作为电磁波的一种，其偏振特性在无线通信、雷达探测、卫星通信等众多领域有着关键应用。例如在无线通信中，信号的发射与接收效率和电磁波的极化方式紧密相关；在雷达系统里，利用极化特性可提升目标识别能力。理解光的偏振和电磁波极化的关系，有助于学生掌握通信系统中信号的传输、处理及接收原理。

2.1.2 应用目标

本案例主要目标是助力通信、电信专业学生透彻理解线偏振光、椭圆偏振光和圆偏振光与电磁波极化之间的内在联系，明晰极化电磁波在天线信号接收方面的作用机制。通过对该案例的学习，使学生能够将理论知识有效应用于实际工程问题的解决，比如在天线设计中，依据极化原理优化设计方案以增强信号接收效果，为后续从事通信系统的设计、调试及维护等工作筑牢理论根基。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

已知光作为电磁波，其光矢量 \vec{E} 在 $x - y$ 平面内的分量 E_x 、 E_y 满足振动方程：

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x), \quad E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y),$$

其中 E_{xm} 、 E_{ym} 分别为 E_x 、 E_y 的振幅， ω 为角频率， k 为波数， φ_x 、 φ_y 为初相位。

请依据 E_x 、 E_y 的相位关系和振幅关系，判断光的偏振类型（线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光），并深入理解极化电磁波在天线信号接收中的应用原理。

2.2.2 需求分析

从知识层面而言，学生需扎实掌握电磁场与电磁波的基础概念，如光矢量、相位、振幅、角频率、波数等，以及三角函数的运算规则和几何意义。在实际应用方面，学生要能够将这些理论知识与天线信号接收等实际问题紧密结合，理解极化匹配对于提升信号接收效率的重要性。若对这些知识和应用的理解存在欠缺，将难以精准分析光的偏振类型，也无法在天线设计等实际工程中有效运用极化原理，进而对通信系统中信号传输与接收环节的理解和掌握造成不利影响。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.1 问题建模

1. 光的偏振类型分析建模：

基于光矢量 \vec{E} 的分量表达式

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

通过分析 φ_x 与 φ_y 的相位关系及 E_{xm} 与 E_{ym} 的振幅关系构建数学模型，判断光的偏振类型。

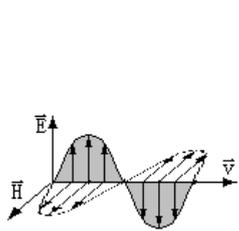


图2.24: 光矢量的分解

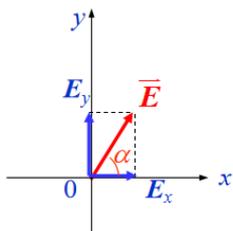


图2.25: 线偏振光

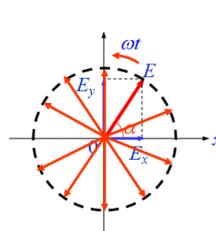


图2.26: 圆偏振光

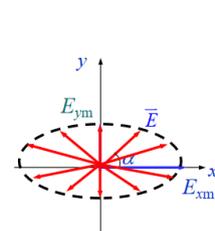


图2.27: 椭圆偏振光

(1) 当 $\varphi_x = \varphi_y$ ，设初相位为0，则

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz).$$

在 $z = 0$ 的等相位面上，合成电磁场强

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos \omega t,$$

合场强方向与 x 轴夹角 $\alpha = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \arctan \frac{E_{ym}}{E_{xm}}$ 为常数, 表明电场矢量尖端轨迹为直线, 即线偏振光, 对应的电磁波为线极化波。

(2) 当 $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ 且 $E_{xm} = E_{ym} = E_m$, 在 $z = 0$ 的等相位面上,

$$E_x = E_m \cos \omega t, \quad E_y = E_m \sin \omega t.$$

合成电磁场强 $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m$ 为常数, 合场强方向与 x 轴夹角

$$\alpha = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \omega t,$$

说明合场强方向以角速度 ω 逆时针旋转, 电场强度尖端轨迹为圆, 即圆偏振光, 对应的电磁波为圆极化波。

(3) 当 $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ 且 $E_{xm} \neq E_{ym}$, 在 $z = 0$ 的等相位面上,

$$E_x = E_{xm} \cos \omega t, \quad E_y = E_{ym} \sin \omega t.$$

消去 t , 由 $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ 可得

$$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} = 1,$$

此为椭圆方程, 表明合场强 \vec{E} 的尖端轨迹为椭圆, 即椭圆偏振光, 对应电磁波为椭圆极化波。

2. 天线信号接收建模: 构建天线极化与接收信号能量关系的模型, 明确接收天线与发射天线极化匹配时接收能量最大, 否则会产生极化损失。定义天线极化方向为在最大增益方向上, 作为发射天线时辐射电磁波的极化, 或作接收时能使天线终端得到最大可用功率方向的入射电磁波的极化; 极化电磁波的电场方向称为极化方向; 极化电磁波的极化方向与传播方向所构成的平面称为极化面。只有接收天线与发射天线极化相同, 即极化匹配时, 才能接收到最大能量。例如垂直极化的接收天线接收垂直极化发射天线辐射的电磁波时, 能获得最大功率。

2.3.2 方法选择

对于光的偏振类型分析, 运用基于三角函数运算和几何图形表示的方法。通过对 E_x 、 E_y 表达式进行严谨的数学运算, 结合三角函数的性质(如 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$)和几何图形(如直线、圆、椭圆的方程表示), 直观且准确地判断光的偏振类型。对于天线信号接收问题, 采用理论分析与实际案例相结合的方法, 通过深入阐述极化匹配的原理, 并给出垂直极化天线接收的具体实例, 帮助学生透彻理解极化电磁波在天线信号接收中的应用。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

1. 光的偏振类型判断:

(1) 线偏振光: 当 $\varphi_x = \varphi_y$, 经上述推导, 在 $z = 0$ 的等相位面上, 合场强

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos \omega t,$$

方向与 x 轴夹角 $\alpha = \arctan \frac{E_{ym}}{E_{xm}}$ 为常数, 确定为线偏振光。

(2) 圆偏振光: 当 $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ 且 $E_{xm} = E_{ym}$, 在 $z = 0$ 的等相位面上, 合场强

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m,$$

方向与 x 轴夹角 $\alpha = \omega t$, 确定为圆偏振光。

(3) 椭圆偏振光: 当 $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ 且 $E_{xm} \neq E_{ym}$, 在 $z = 0$ 的等相位面上, 由

$$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} = 1,$$

确定为椭圆偏振光。

2. 天线信号接收分析: 在天线增益最大指向对准的前提下, 依据天线极化与接收信号能量关系模型, 明确接收天线与发射天线极化匹配时接收能量最大。如垂直极化的接收天线接收垂直极化发射天线辐射的电磁波时, 能实现最大能量接收; 若极化不匹配, 则会产生极化损失, 导致接收功率降低。

2.4.2 结果分析

1. 光的偏振类型方面: 通过构建的模型和运用的分析方法, 能够精确判断光的偏振类型, 深入领会不同偏振光的形成原理。这对于深入研究光的传播特性、光与物质的相互作用等具有关键意义, 在光学仪器设计(如偏振片的设计与应用)、光通信系统中光信号的调制与解调(利用光的偏振特性实现信号的编码与解码)等领域有着广泛应用。

2. 天线信号接收方面: 清晰明确了极化匹配在天线信号接收中的核心作用以及极化损失产生的根源。这对于实际通信工程具有重要指导价值, 在设计通信系统时, 可依据具体需求精心设计和挑选合适的天线, 合理优化天线的布局和方向, 从而显著提高信号接收的效率和质量, 有效降低信号传输过程中的能量损耗, 保障通信的稳定性和可靠性。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

1. **无线通信领域**：在5G乃至未来的6G通信系统中，利用极化复用技术，通过同时使用不同极化方式的信号进行传输，可大幅提升频谱利用率，增加通信容量。例如，采用正交极化的两根天线同时发射和接收信号，可在相同频率资源下实现两路独立信号的传输，有效缓解频谱资源紧张的问题。

2. **雷达技术**：在合成孔径雷达（SAR）中，利用极化信息能够获取目标更丰富的特征。通过发射和接收不同极化方式的电磁波，并分析回波信号的极化变化，可对目标的形状、材质、表面粗糙度等进行更精准的识别和分类，在地质勘探、海洋监测、军事侦察等领域发挥重要作用。

3. **光学成像**：在偏振成像技术中，利用光的偏振特性可增强图像的对比度和分辨率，获取目标的隐藏信息。例如在生物医学成像中，通过分析组织对不同偏振光的响应，可更清晰地观察细胞结构和病变组织，辅助疾病的诊断和治疗；在安防监控领域，可利用偏振成像穿透烟雾、雾霾等环境干扰，提高监控图像的质量和目标识别能力。

2.5.2 反思总结

1. **知识深度与广度**：本案例涉及的知识具有较高的专业性和深度，在教学过程中，需引导学生不仅要熟练掌握基本理论知识，更要深入理解其物理本质和内在联系。同时，可适当拓展相关知识，如介绍不同介质对电磁波极化的影响、高阶偏振模式等，拓宽学生的知识面，培养学生的创新思维和探索精神。

2. **实际应用复杂性**：尽管案例中介绍了极化电磁波在天线信号接收中的基本应用原理，但实际工程中的情况更为复杂和多样化。实际环境中存在多种干扰因素，如多径传播、噪声干扰、环境电磁干扰等，会对电磁波的极化特性产生影响；天线的极化特性也会受到制造工艺、安装方式、工作频率等因素的制约。在教学和实践中，需引导学生全面考虑这些实际因素，培养学生解决复杂工程问题的能力，使学生能够将理论知识灵活应用于实际工程场景。

3. **模型简化与实际情况差异**：在分析光的偏振类型和天线信号接收时，采用了一定的简化模型。例如，在分析光的偏振时，忽略了介质的色散、吸收等效应以及光的矢量波动特性中的一些高阶项；在天线信号接收模型中，假设了理想的天线和传播环境，未考虑天线的互耦效应、实际传播环境中的非均匀性等因素。后续教学中可引导学生对这些模型进行改进和完善，

引入更符合实际情况的参数和模型，提高学生的建模和分析能力，使学生能够建立更精确、更实用的工程模型。

案例3 角动量守恒定律在航空事业中的应用

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

航空事业是一个综合性的高科技领域，涉及众多工程学科。角动量守恒定律是物理学中的重要定律，在航空领域有着广泛的应用。直升机作为航空飞行器的重要类型，其飞行原理与角动量守恒密切相关。了解角动量守恒定律在直升机飞行中的应用，对于电气工程及自动化、机电工程、机械设计、土木工程等专业的学生理解相关机械系统的运行原理至关重要。

3.1.2 应用目标

本案例旨在帮助相关专业学生进一步理解角动量守恒定律，并将其应用于解释直升机的飞行原理。通过该案例，使学生能够将理论知识与实际工程应用相结合，培养学生运用物理原理分析和解决实际问题的能力，为后续学习专业课程和从事相关工程工作奠定基础。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

飞出地球是人类自古以来的共同梦想，我们的祖先就曾编织过美丽的“嫦娥奔月”的神话，敦煌壁画中更有生动的飞天形象，举世闻名。而如今随着我国的航空事业的蒸蒸日上，生活中我们随处可见各种各样的飞机，其中气势壮观的直升机方阵在国庆中阅兵中的给我们留下了深刻的印象，同学们有没有观察过靠螺旋桨获得上升动力的直升机有几副螺旋桨呢？



图3.28: (中国)武直-10



图3.29: (中国)直-8b运输直升机

通过仔细观察,我们发现直升机有两副螺旋桨,为什么有两副呢?一副螺旋桨为什么不行?

3.2.2 需求分析

从知识层面看,学生需要掌握角动量守恒定律的概念和表达式($L = I\omega$,其中 L 为角动量, I 为转动惯量, ω 为角速度)。在应用方面,学生要能够运用该定律分析直升机螺旋桨转动时产生的角动量变化以及对机身的影响。如果对这些知识理解不透彻,将无法解释直升机的飞行原理,也难以将角动量守恒定律应用到其他涉及旋转运动的工程问题中。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题建模

1. 单螺旋桨直升机模型:假设直升机只有一副螺旋桨,螺旋桨转动时切割空气产生升力,同时根据牛顿第三定律,会对机身产生一个反方向的力矩。设螺旋桨的角动量为 $L_{propeller}$,机身的角动量为 $L_{fuselage}$,由于直升机受到的合外力矩为零(不考虑气流等偶然因素),根据角动量守恒定律 $L = L_{propeller} + L_{fuselage} = 0$,则 $L_{fuselage} = -L_{propeller}$,这意味着机身会在空中反方向旋转。

2. 双螺旋桨直升机模型:对于有两副螺旋桨(主螺旋桨和尾桨)的直升机,设主螺旋桨角动量为 $L_{m-propeller}$,尾桨角动量为 $L_{t-propeller}$,机身角动量为 $L_{fuselage}$,根据角动量守恒定律 $L = L_{m-propeller} + L_{t-propeller} + L_{fuselage} = 0$ 。为了使机身稳定,即 $L_{fuselage} = 0$,则需要 $L_{m-propeller} + L_{t-propeller} = 0$,也就是 $L_{m-propeller} = -L_{t-propeller}$,通过两副螺旋桨反向旋转来抵消彼此产生的反作用力矩。

3.3.2 方法选择

采用基于物理定律的建模方法，利用角动量守恒定律来建立直升机螺旋桨转动与机身运动的关系模型。通过对比单螺旋桨和双螺旋桨直升机的模型，分析不同情况下角动量的变化，从而解释直升机的飞行原理。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 模型求解

1. **单螺旋桨情况**：当直升机只有一副螺旋桨时，螺旋桨转动产生角动量 $L_{propeller}$ ，根据角动量守恒，机身会产生大小相等、方向相反的角动量 $L_{fuselage}$ ，导致机身反方向旋转，无法实现稳定飞行。

2. **双螺旋桨情况**：对于双螺旋桨直升机，主螺旋桨和尾桨反向旋转，使得 $L_{m-propeller} + L_{t-propeller} = 0$ ，满足机身角动量 $L_{fuselage} = 0$ ，从而保证机身平稳飞行。

3.4.2 结果分析

1. **原理阐释方面**：通过建立的模型和求解过程，清晰地解释了直升机为什么需要两副螺旋桨。单螺旋桨直升机由于角动量守恒会导致机身旋转无法稳定飞行，而双螺旋桨直升机通过合理设计螺旋桨的旋转方向，利用角动量守恒定律实现了机身的平稳飞行。这使学生深入理解了角动量守恒定律在实际工程中的应用。

2. **工程应用方面**：这种分析为直升机的设计和制造提供了理论依据。工程师在设计直升机时，需要根据角动量守恒定律合理选择螺旋桨的参数（如转动惯量、转速等）以及布局，以确保直升机的飞行稳定性和操控性。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

1. **航空领域其他应用**：角动量守恒定律在飞机的发动机设计、导弹的姿态控制等方面也有应用。例如，飞机发动机的转子在高速旋转时，其角动量需要在整个飞机系统中进行合理平衡，以避免对飞机的飞行姿态产生不良影响；导弹在飞行过程中，通过控制自身的角动量来实现精确的姿态调整和轨迹控制。

2. 其他工程领域：在机械设计中，对于旋转机械（如离心机、涡轮机等），角动量守恒定律可用于分析设备的运行稳定性和设计平衡装置。在土木工程中，一些大型旋转设备（如塔式起重机的旋转机构）的设计和运行也需要考虑角动量守恒，以确保设备的安全和稳定。

3.5.2 反思总结

1. 知识理解深化：本案例有助于学生深化对角动量守恒定律的理解，从单纯的理论知识上升到实际工程应用层面。在教学过程中，可以进一步引导学生思考在不同复杂工况下（如气流不稳定、螺旋桨故障等）角动量守恒定律的应用和调整，提高学生对知识的灵活运用能力。

2. 多学科融合：该案例涉及物理、机械、航空等多学科知识，体现了工程领域多学科融合的特点。在教学中，可以加强不同学科知识之间的联系，培养学生的综合思维能力。例如，结合机械设计知识讲解螺旋桨的结构设计，结合电气工程知识讲解螺旋桨电机的控制等。

3. 模型局限性：本案例建立的模型是基于简化的假设，忽略了一些实际因素，如空气阻力的复杂影响、直升机的弹性变形等。在实际工程应用中，需要考虑这些因素对模型进行修正和完善。后续可以引导学生对模型进行改进，提高学生解决实际复杂问题的能力。

案例4 稳恒磁场在电气工程中的应用案例

4.1 背景简介与应用目标

4.1.1 背景简介

在电气工程领域，磁场的分布和特性是基础且关键的研究内容。稳恒磁场中的安培环路定理等理论，是分析和设计电气设备（如电机、变压器、电磁铁等）的重要依据。理解载流导体周围的磁场分布，有助于优化电气设备的性能、减少电磁干扰等。掌握相关知识，对电气工程专业学生后续学习专业课程、从事电气系统设计和研发工作具有重要意义。

4.1.2 应用目标

本案例旨在帮助电气工程专业学生深入理解安培环路定理在求解载流导体磁场分布中的应用。通过分析无限长载流圆柱体的磁场分布问题，使学生熟练掌握利用物理定理进行磁场计算的方法，培养学生的逻辑思维和工程分析能力，为其在实际工程中解决与磁场相关的问题奠定坚实的理论和方法基础。

4.2 问题描述与需求分析

4.2.1 问题描述

已知无限长载流圆柱体，需要求解其磁场分布情况，即确定在圆柱体内部（ $0 < r < R$ ， r 为到圆柱体轴线的距离， R 为圆柱体半径）和外部（ $r > R$ ）不同位置处的磁感应强度 B 的大小和方向。

4.2.2 需求分析

从知识层面看，学生需要牢固掌握安培环路定理（ $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ ，其中 \vec{B} 为磁感应强

度， $d\vec{l}$ 为积分路径微元， μ_0 为真空磁导率， I_{enc} 为环路所包围的电流）、磁感应强度的概念以及电流和磁场的基本关系。在应用方面，学生要能够根据问题的对称性，合理选取积分回路，运用安培环路定理进行磁场强度的计算。如果对这些知识理解不透彻或不能正确运用，将无法准确求解磁场分布，也难以将该方法应用到其他类似的电磁问题中。

4.3 问题建模与方法选择

4.3.1 问题建模

1. **对称性分析建模：**无限长载流圆柱体具有轴对称性，其产生的磁场也具有轴对称性，即磁感应强度 B 的大小只与到轴线的距离 r 有关，方向沿以轴线为中心的圆周切线方向。

2. **积分回路选取建模：**

(1) 当 $r > R$ 时，选取半径为 r 的同心圆作为积分回路 L ，回路平面与圆柱体轴线垂直。根据对称性， \vec{B} 沿该回路的方向处处与 $d\vec{l}$ 方向相同，且 B 大小处处相等。

(2) 当 $0 < r < R$ 时，同样选取半径为 r 的同心圆作为积分回路 L ，此时回路所包围的电流 I_{enc} 需要根据电流密度和回路所围面积来计算。设圆柱体中电流均匀分布，电流密度为 $J = \frac{I}{\pi R^2}$ ，则 $I_{enc} = J \cdot \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}$ 。

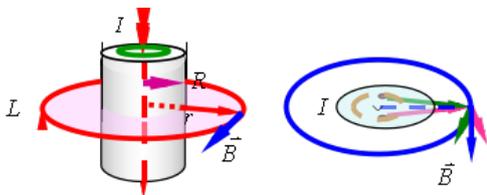


图4.30: 圆柱体外磁场分布

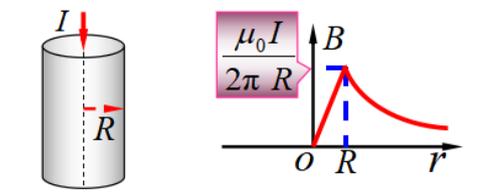


图4.31: 圆柱体内磁场分布

4.3.2 方法选择

采用基于物理定理的建模方法，利用安培环路定理来建立无限长载流圆柱体磁场分布的计算模型。通过分析问题的对称性，合理选取积分回路，将复杂的磁场分布问题转化为可通过安培环路定理求解的数学问题。

4.4 模型求解与结果分析

4.4.1 模型求解

1. 当 $r > R$ 时：根据安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

因为 \vec{B} 与 $d\vec{l}$ 同向且 B 大小恒定，所以

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

则 $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ ，解得 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。

2. 当 $0 < r < R$ 时：安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

其中 $I_{enc} = \frac{I r^2}{R^2}$ ，且 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$ ，则

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \frac{I r^2}{R^2}$$

解得 $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ 。

4.4.2 结果分析

1. 原理阐释方面：通过建立的模型和求解过程，清晰地得到了无限长载流圆柱体内部和外部的磁场分布情况。结果表明，在圆柱体外部，磁感应强度 B 与到轴线的距离 r 成反比；在圆柱体内部， B 与 r 成正比。这使学生深入理解了安培环路定理在求解磁场分布问题中的应用原理，以及电流和磁场之间的定量关系。

2. 工程应用方面：这种分析为涉及载流导体的电气设备设计提供了理论依据。例如，在设计电缆时，了解其周围磁场分布可以帮助优化电缆的布局，减少对周围电子设备的电磁干扰；在电机和变压器的设计中，准确计算载流部件的磁场分布，有助于提高设备的磁性能和效率，减少能量损耗。

4.5 应用扩展与反思总结

4.5.1 应用扩展

1. **其他载流导体磁场分析**：该方法可扩展应用到其他具有对称性的载流导体磁场分布求解中，如无限长载流圆柱面、通电螺线管等。通过合理选取积分回路和运用安培环路定理，可以准确计算这些导体周围的磁场分布，为相关电气设备的设计和优化提供支持。

2. **电磁兼容设计**：在电子设备和电力系统的电磁兼容设计中，了解载流导体的磁场分布有助于预测和减少电磁干扰。例如，通过调整导体的布局 and 电流大小，使不同设备产生的磁场相互抵消或减弱，提高整个系统的电磁兼容性。

3. **传感器设计**：基于对磁场分布的精确分析，可以设计出更灵敏、准确的磁场传感器。例如，利用霍尔效应原理的传感器，通过准确了解被测磁场的分布特性，优化传感器的结构和参数，提高其测量精度和可靠性。

4.5.2 反思总结

1. **知识理解深化**：本案例有助于学生深化对安培环路定理等电磁学知识的理解，从理论层面上升到实际应用层面。在教学过程中，可以进一步引导学生思考在非均匀电流分布、存在磁介质等更复杂情况下，如何对模型进行修正和求解，提高学生对知识的灵活运用能力。

2. **多学科融合**：磁场分布的分析涉及物理、数学等多学科知识，体现了工程领域多学科融合的特点。在教学中，可以加强不同学科知识之间的联系，培养学生的综合思维能力。例如，结合数学中的曲线积分知识讲解安培环路定理的应用，结合物理中的电磁感应知识进一步拓展磁场与电场的相互关系。

3. **模型局限性**：本案例建立的模型基于无限长载流圆柱体的理想假设，忽略了实际导体的长度限制、电流的非均匀性以及周围环境的影响等因素。在实际工程应用中，需要考虑这些因素对模型进行修正和完善。后续可以引导学生对模型进行改进，提高学生解决实际复杂问题的能力。

4.5.3 动手实践练习

练习：求无限长载流圆柱面的磁场分布。

案例5 力学在工程问题中的应用案例

5.1 背景简介与应用目标

5.1.1 背景简介

工程力学是一门研究物体受力和变形规律的学科，在众多工程领域中扮演着基础性的关键角色。从土木建筑的结构设计，确保建筑物能够承受各种荷载而安全稳固；到机械制造中的机械结构设计，保障机械设备高效可靠运行；再到交通工程的桥梁、道路设计以及航空航天飞行器结构设计等，工程力学的理论和方法贯穿始终。它以牛顿力学、材料力学等基本原理为基石，为工程师们分析和解决实际工程问题提供了科学有效的手段。

5.1.2 应用目标

本案例主要针对土木工程专业学生，聚焦于工程力学中受力分析这一知识点。通过具体的桁架结构案例，旨在让学生深刻理解如何运用受力分析和强度条件来解决实际工程问题。培养学生将理论知识与实际工程紧密结合的能力，使学生能够熟练运用工程力学原理对工程结构进行分析和设计，为其后续学习专业课程以及未来从事土木工程相关工作，如建筑结构设计、施工安全评估等，奠定坚实的理论和实践基础。

5.2 问题描述与需求分析

5.2.1 问题描述

已知一桁架结构，其中两杆的横截面面积均为 $A = 100\text{mm}^2$ ，杆1的许用拉应力 $[\sigma_{t1}] = 200\text{MPa}$ ，杆2的许用压应力 $[\sigma_{c2}] = 150\text{MPa}$ 。以节点B为研究对象，通过受力分析建立平衡方程，求两杆的轴力，并根据强度条件确定载荷 F 的最大许用值。

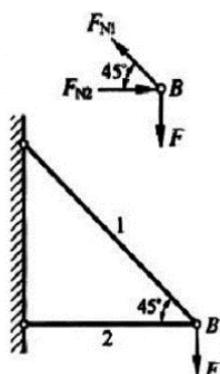


图5.32: 桁架结构及受力分析

5.2.2 需求分析

从知识层面看，学生需要牢固掌握工程力学中的受力分析方法（如隔离体法、力的平衡方程等）、强度条件（许用应力与实际应力的关系）以及材料力学中关于应力和内力的基本概念。在应用方面，学生要能够准确对实际工程结构进行受力分析，合理选取研究对象，正确建立平衡方程并求解，再根据强度条件对结构进行强度校核。若对这些知识和技能掌握不扎实，将无法准确求解桁架结构中杆件的内力，也不能正确确定载荷的最大许用值，进而影响对工程结构安全性和可靠性的评估。

5.3 问题建模与方法选择

5.3.1 问题建模

1. **受力分析建模：**以节点 B 为研究对象，对其进行受力分析。节点 B 受到外力 F 、杆1的拉力 F_{N1} 和杆2的拉力 F_{N2} 。根据力的平衡原理，在 x 轴和 y 轴方向分别建立平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 。

2. **强度条件建模：**根据材料力学知识，建立杆件的强度条件模型。对于受拉杆件（杆1），其强度条件为 $F_{N1} \leq A[\sigma_{t1}]$ ；对于受压杆件（杆2），其强度条件为 $|F_{N2}| \leq A[\sigma_{c2}]$ 。通过这些模型来确定杆件在给定载荷下是否满足强度要求，进而确定载荷 F 的最大许用值。

5.3.2 方法选择

采用基于力学原理的建模方法，运用隔离体法对节点 B 进行受力分析，依据力的平衡方程求解杆件内力。再结合材料力学中的强度条件，通过比较实际内力与许用内力（由许用应力和

横截面面积确定)的关系,来确定结构所能承受的最大载荷。这种方法是工程力学解决结构受力和强度问题的基本且有效的手段。

5.4 模型求解与结果分析

5.4.1 模型求解

1. 求解杆件轴力: 以节点B为研究对象,建立平衡方程 $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, 即

$$-F_{N2} - F_{N1} \cos 45^\circ = 0, \quad -F_{N1} \sin 45^\circ - F = 0.$$

解方程组可得: $F_{N1} = -\sqrt{2}F$ (负号表示拉力方向与假设方向相反,实际为拉力), $F_{N2} = -F$ (同样为拉力)。

2. 确定载荷最大许用值:

(1) 对于杆1(受拉),根据强度条件 $F_{N1} \leq A[\sigma_{t1}]$, 即

$$\sqrt{2}F \leq 100 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^6$$

解得

$$F \leq \frac{100 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^6}{\sqrt{2}} = 14.14kN.$$

(2) 对于杆2(受拉),根据强度条件 $F_{N2} \leq A[\sigma_{c2}]$, 即

$$F \leq 100 \times 10^{-6} \times 150 \times 10^6 = 15.0kN.$$

综合比较,取较小值,所以载荷F的最大许用值为14.14kN。

5.4.2 结果分析

1. 原理阐释方面: 通过建立的模型和求解过程,清晰地展示了如何运用受力和强度条件来确定桁架结构中杆件的内力以及结构所能承受的最大载荷。这使学生深入理解了工程力学中力的平衡和强度理论在实际工程结构分析中的应用原理,明确了各个物理量之间的关系和计算方法。

2. 工程应用方面: 该分析结果对于土木工程中的结构设计和安全评估具有重要的指导意义。在实际工程中,工程师可以根据类似的方法对各种桁架结构(如桥梁桁架、建筑屋架等)进行受力和强度校核,合理设计杆件的尺寸和材料,确保结构在给定载荷下的安全性和可靠性,避免因结构强度不足而导致的工程事故。

5.5 应用扩展与反思总结

5.5.1 应用扩展

1. **其他工程结构**：这种受力和强度校核的方法不仅适用于桁架结构，还可广泛应用于其他工程结构，如梁结构、刚架结构等。在梁结构中，可以通过受力分析确定梁的内力（弯矩、剪力等），再根据强度条件（如弯曲正应力强度条件、剪应力强度条件等）来设计梁的截面尺寸和材料，保证梁在承受荷载时的正常使用。

2. **不同材料和工况**：在实际工程中，还可以考虑不同材料的力学性能（如弹性模量、泊松比等）以及复杂的工况（如动态载荷、温度变化等）对结构的影响。例如，对于在高温环境下工作的结构，需要考虑材料的高温力学性能变化，对强度条件进行修正；对于承受动态载荷的结构，要考虑惯性力等因素，采用动力学分析方法与静力学分析相结合的方式进行结构设计和强度校核。

5.5.2 反思总结

1. **知识理解深化**：本案例有助于学生深化对工程力学基本原理的理解，从理论学习过渡到实际应用。在教学过程中，可以进一步引导学生思考在更复杂的结构体系（如超静定结构）中，如何对模型进行改进和求解，以及如何考虑结构的变形协调条件等，提高学生对知识的灵活运用能力和解决复杂问题的能力。

2. **多学科融合**：工程力学的应用涉及多个学科领域，如材料科学、数学等。在教学中，可以加强不同学科知识之间的联系，培养学生的综合思维能力。例如，结合材料科学知识讲解材料的选择和性能对结构强度的影响，结合数学知识讲解平衡方程的建立和求解方法等。

3. **模型局限性**：本案例建立的模型是基于一些简化假设，如杆件为理想直杆、材料均匀连续等。在实际工程中，结构和材料往往存在一定的缺陷和非均匀性，这些因素可能会影响结构的受力和强度。后续可以引导学生对模型进行修正和完善，考虑实际因素的影响，提高模型的准确性和适用性。

案例6 转动定律在新能源汽车中的应用

6.1 背景简介与应用目标

6.1.1 背景简介

在新能源汽车专业领域，动力学分析和控制系统设计是核心内容。刚体定轴转动的转动定律作为刚体动力学的重要原理，描述了刚体所受合外力矩与角加速度之间的关系，是理解和分析新能源汽车动力系统运行机制的关键基础。新能源汽车的动力系统包含驱动电机、变速器、传动轴、车轮等部件，这些部件的运动涉及到转动，转动定律在分析它们的运动状态变化、能量转换等方面发挥着重要作用。

6.1.2 应用目标

本案例旨在帮助新能源汽车专业学生深入理解刚体定轴转动的转动定律，并将其应用于新能源汽车动力系统的分析中。通过具体案例，使学生掌握运用转动定律计算电机输出力矩的方法，培养学生运用物理原理解决实际工程问题的能力，为其后续学习新能源汽车相关专业课程（如汽车动力学、电动汽车技术等）和从事新能源汽车研发、设计、调试等工作奠定坚实的理论和实践基础。

6.2 问题描述与需求分析

6.2.1 问题描述

已知一辆新能源汽车配备的永磁同步电动机（PMSM）的转动惯量 $J = 0.35\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，车轮半径 $R = 0.3\text{m}$ ，车辆要在5秒内从静止加速至 27.8m/s 。试根据刚体定轴转动定律计算电动机输出的力矩，以及电机控制器如何根据计算结果调节供电电流，以实现车辆平稳、高效的加速。

6.2.2 需求分析

知识层面上，学生要掌握刚体定轴转动定律（ $M = J\alpha$ ，其中 M 为合外力矩， J 为转动惯量， α 为角加速度）、线加速度与角加速度的关系（ $a = R\alpha$ ）以及匀加速直线运动公式（ $v_t = v_0 + at$ ）等物理知识。应用方面，学生要能够运用这些知识对新能源汽车的加速过程进行动力学分析，计算出电机输出力矩，并理解电机控制器的工作原理。如果对这些知识理解不透彻或不能正确运用，将无法准确计算电机力矩，也难以理解新能源汽车动力系统的控制策略。

6.3 问题建模与方法选择

6.3.1 问题建模

1. **运动学分析建模：**根据匀加速直线运动公式 $v_t = v_0 + at$ ，已知车辆初速度 $v_0 = 0$ ，末速度 $v_t = 27.8\text{m/s}$ ，时间 $t = 5\text{s}$ ，可以计算出线加速度 a 。再根据线加速度与角加速度的关系 $a = R\alpha$ ，建立线加速度与角加速度的联系，从而求出角加速度 α 。

2. **动力学分析建模：**根据刚体定轴转动定律 $M = J\alpha$ ，已知转动惯量 J 和求出的角加速度 α ，建立电动机输出力矩 M 的计算模型。同时，考虑电机控制器根据计算出的力矩需求调节供电电流的过程，建立电机控制的逻辑模型。

6.3.2 方法选择

采用基于物理定律的建模方法，运用匀加速直线运动公式、线加速度与角加速度的关系以及刚体定轴转动定律，分别建立新能源汽车加速过程的运动学和动力学模型。通过对模型中各物理量的计算和分析，解决电机输出力矩的计算和电机控制策略的问题。

6.4 模型求解与结果分析

6.4.1 模型求解

1. 计算平均角加速度：

根据匀加速直线运动公式 $v_t = v_0 + at$ ，可得线加速度

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} = \frac{27.8 - 0}{5} = 5.56\text{m/s}^2.$$

再根据 $a = R\alpha$ ，可得角加速度

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{5.56}{0.3} = 18.53\text{rad/s}^2.$$

2. 根据转动定律求力矩：

根据刚体定轴转动定律 $M = J\alpha$ ，已知 $J = 0.35\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ， $\alpha = 18.53\text{rad/s}^2$ ，则电动机输出的力矩

$$M = 0.35 \times 18.53 = 6.49\text{N}\cdot\text{m}.$$

3. 电机控制过程：

求出电动机输出的力矩后，电机控制器根据计算出的力矩需求，调节对电动机的供电电流，以产生相应的电磁力矩，确保车辆加速过程中的力矩输出稳定且高效。

6.4.2 结果分析

1. 原理阐释方面：通过建立的模型和求解过程，清晰地展示了如何运用刚体定轴转动定律计算新能源汽车电动机输出力矩，以及电机控制器的工作原理。这使学生深入理解了转动定律在新能源汽车动力系统中的应用原理，明确了各物理量之间的关系和计算方法。

2. 工程应用方面：该分析结果对于新能源汽车的研发和设计具有重要的指导意义。工程师可以根据转动定律准确计算电机在不同工况下所需输出的力矩，合理设计电机的参数和控制策略，提高新能源汽车的动力性能和能源利用效率，确保车辆在加速、制动等过程中的稳定性和可靠性。

6.5 应用扩展与反思总结

6.5.1 应用扩展

1. 其他汽车工况分析：转动定律不仅可用于分析新能源汽车的加速过程，还可应用于车辆的制动、爬坡等工况。例如，在制动过程中，通过计算车轮的角加速度和所需制动力矩，设计合适的制动系统；在爬坡时，根据车辆的负载和坡度，计算电机需要输出的额外力矩，优化动力系统的性能。

2. 其他动力系统设计：在其他涉及旋转部件的动力系统设计中，如风力发电系统、工业机器人关节驱动系统等，转动定律同样具有重要的应用价值。例如，在风力发电系统中，通过转动定律分析风轮的转动特性，优化风轮的设计和控制策略，提高发电效率；在工业机器人关节驱动系统中，运用转动定律计算关节所需的驱动力矩，实现机器人的精确运动控制。

6.5.2 反思总结

1. 知识理解深化：本案例有助于学生深化对刚体定轴转动定律等物理知识的理解，从理论学习过渡到实际应用。在教学过程中，可以进一步引导学生思考在更复杂的工况下（如车辆行驶过程中的颠簸、电机的非线性特性等），如何对模型进行修正和求解，提高学生对知识的灵活运用能力和解决复杂问题的能力。

2. 多学科融合：转动定律的应用涉及物理、机械、电气等多学科知识，体现了新能源汽车专业多学科融合的特点。在教学中，可以加强不同学科知识之间的联系，培养学生的综合思维能力。例如，结合机械设计知识讲解电机和车轮的结构设计，结合电气工程知识讲解电机控制器的原理和设计。

3. 模型局限性：本案例建立的模型是基于一些简化假设，如车辆行驶过程中忽略空气阻力、电机为理想刚体等。在实际工程中，这些因素可能会对车辆的动力学性能产生影响。后续可以引导学生对模型进行改进，考虑实际因素的影响，提高模型的准确性和适用性。

案例7 磁聚焦在电子显微镜技术中的应用

7.1 背景简介与应用目标

7.1.1 背景简介

在测控、智造、机设等专业领域，尤其是涉及电子系统和精密仪器的方向，理解微观层面的物理现象和技术应用至关重要。磁场对运动电荷的作用是电磁学中的重要知识点，电子显微镜作为研究微观世界的关键工具，其性能的优化依赖于对电子运动精确控制相关的物理原理。磁聚焦技术利用磁场对电子的作用来实现电子束的聚焦，是电子显微镜等电真空系统中的关键技术之一。

7.1.2 应用目标

本案例旨在帮助测控、智造、机设等专业学生理解磁场对运动电荷的作用，特别是带电粒子在磁场中的螺线运动原理，并将其与实际的“磁聚焦”技术应用相联系。通过学习该案例，使学生掌握电子显微镜中磁聚焦技术的工作原理，培养学生运用电磁学知识解决实际工程问题的能力，为后续学习相关专业课程（如《汽车电器与电子系统》等）以及从事电子设备研发、精密仪器制造等工作奠定基础。

7.2 问题描述与需求分析

7.2.1 问题描述

已知从电子枪射出的电子进入近似均匀的恒定磁场 B 中，电子枪保证各电子初速 v 大小近似相等且 v 与 B 的夹角足够小，电子做螺线运动。试分析电子在磁场中的运动规律，理解如何利用这种运动实现电子束的聚焦，即“磁聚焦”技术的原理。

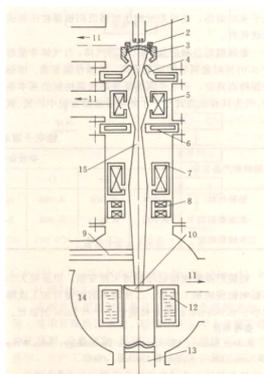


图7.33: 磁聚焦电子枪结构示意图

7.2.2 需求分析

从知识层面看, 学生需要掌握洛伦兹力公式 ($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, 其中 q 为电荷电量, \vec{v} 为电荷速度, \vec{B} 为磁感应强度)、带电粒子在磁场中运动的轨迹分析方法 (如匀速圆周运动和匀速直线运动的合成) 等电磁学知识。在应用方面, 学生要能够运用这些知识分析电子在磁场中的运动情况, 理解磁聚焦技术的实现原理。如果对这些知识理解不透彻, 将无法准确分析电子的运动轨迹, 也难以理解磁聚焦技术在电子显微镜等设备中的应用。

7.3 问题建模与方法选择

7.3.1 问题建模

1. 电子运动分析建模: 将电子在磁场中的运动分解为平行于磁场方向和垂直于磁场方向的两个分运动。垂直于磁场方向, 电子受到洛伦兹力作用做匀速圆周运动, 根据洛伦兹力提供向心力 $qv_{\perp}B = m\frac{v_{\perp}^2}{r}$ (其中 v_{\perp} 为垂直于磁场方向的速度分量, m 为电子质量, r 为圆周运动半径), 可得圆周运动半径 $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, 周期 $T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$; 平行于磁场方向, 电子不受力, 做匀速直线运动, 速度为 v_{\parallel} 。这样就建立了电子在磁场中做螺线运动的模型。

2. 磁聚焦原理建模: 由于各电子初速 v 大小近似相等且 v 与 B 的夹角足够小, 所以 v_{\perp} 近似相等, v_{\parallel} 也近似相等。根据上述电子运动模型, 电子做圆周运动的周期 T 相同, 在平行于磁场方向经过一个周期的时间 T 后, 各电子在平行方向上移动相同的距离, 从而实现电子束的聚焦, 建立起磁聚焦的原理模型。

7.3.2 方法选择

采用基于物理定律的建模方法，运用洛伦兹力公式和运动的合成与分解知识，分别建立电子在磁场中运动的模型和磁聚焦原理的模型。通过对模型中各物理量的分析和计算，解释电子的运动轨迹和磁聚焦技术的原理。

7.4 模型求解与结果分析

7.4.1 模型求解

1. **电子运动轨迹分析：**根据建立的电子运动模型，已知电子的电量 q 、质量 m 、初速度 v 以及磁场的磁感应强度 B ，可以计算出电子做圆周运动的半径 $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ 和周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ ，以及在平行于磁场方向的运动速度 v_{\parallel} ，从而确定电子的螺线运动轨迹。

2. **磁聚焦原理阐释：**因为各电子的 T 相同，在经过一个周期的时间后，各电子在平行于磁场方向移动相同的距离，原本分散的电子束在空间上汇聚到一起，实现了电子束的聚焦。

7.4.2 结果分析

1. **原理阐释方面：**通过建立的模型和求解过程，清晰地解释了电子在磁场中的螺线运动规律以及磁聚焦技术的原理。这使学生深入理解了磁场对运动电荷的作用在实际技术中的应用，明确了电子运动轨迹与磁聚焦效果之间的关系。

2. **工程应用方面：**该分析结果对于电子显微镜等电真空系统的设计和 optimization 具有重要意义。工程师可以根据磁聚焦原理，合理设计磁场的强度和分布，优化电子枪的结构，提高电子显微镜的分辨率和成像质量，从而更好地满足微观研究的需求。

7.5 应用扩展与反思总结

7.5.1 应用扩展

1. **其他电真空设备：**磁聚焦技术不仅应用于电子显微镜，还可应用于其他电真空设备，如电子束焊机、阴极射线管等。在电子束焊机中，利用磁聚焦技术将电子束聚焦到焊接部位，提高焊接的精度和能量密度；在阴极射线管中，通过磁聚焦使电子束准确地打在荧光屏上，实现清晰的图像显示。

2. 粒子加速器：在粒子加速器中，磁场对带电粒子的作用也起着关键作用。通过合理设计磁场，可以实现对带电粒子的加速、聚焦和导向，使粒子获得高能量并准确地轰击目标，用于科学研究、医疗治疗（如肿瘤放疗）等领域。

7.5.2 反思总结

1. 知识理解深化：本案例有助于学生深化对磁场对运动电荷作用相关知识的理解，从理论层面上升到实际应用层面。在教学过程中，可以进一步引导学生思考在非均匀磁场、相对论效应等更复杂情况下，电子的运动规律和磁聚焦技术的变化，提高学生对知识的灵活运用能力。

2. 多学科融合：磁聚焦技术涉及电磁学、电子学、材料科学等多学科知识，体现了相关专业多学科融合的特点。在教学中，可以加强不同学科知识之间的联系，培养学生的综合思维能力。例如，结合电子学知识讲解电子枪的工作原理，结合材料科学知识讲解磁场产生装置的材料选择和性能优化。

3. 模型局限性：本案例建立的模型是基于电子初速大小近似相等、磁场均匀等简化假设。在实际应用中，电子初速存在一定的分散性，磁场也难以做到完全均匀，这些因素会影响磁聚焦的效果。后续可以引导学生对模型进行改进，考虑实际因素的影响，提高模型的准确性和适用性。

案例8 光学技术在航天工程中的应用

8.1 背景简介与应用目标

8.1.1 背景简介

中国探月工程（嫦娥工程）需对月球表面进行高精度三维成像与着陆点定位，激光测距技术凭借激光的准直性、高能量等特性，成为实现“厘米级误差”测量的关键手段，支撑嫦娥四号、五号等任务的顺利开展。

8.1.2 应用目标

利用光学技术（激光测距）实现地月距离的高精度测量，为月球表面三维成像、着陆点定位提供准确的距离数据，保障探月任务中轨道控制、着陆安全等核心需求。

8.2 问题描述与需求分析

8.2.1 问题描述

地月距离遥远（约38万公里），传统测距手段（如无线电测距）精度不足，需采用激光测距技术：向月球发射脉冲激光，测量激光往返地月的时间 Δt ，进而计算地月距离，但需解决“激光传输的准直性保持”“回波信号的增强与检测”“时间测量的高精度”等问题。

8.2.2 需求分析

需要建立“激光往返时间-地月距离”的量化模型，同时结合光学原理（几何光学、干涉衍射、光电效应）解决“激光准直”“相位差计算（提升时间测量精度）”“信号接收转换”等关键技术问题，以满足“误差小于5厘米”的高精度要求。

8.3 问题建模与方法选择

8.3.1 问题建模

距离模型：根据匀速直线运动（激光在真空中速度近似为光速 c ），地月距离 d 与激光往返时间 Δt 的关系为 $d = \frac{c\Delta t}{2}$ （激光从地球到月球再返回，路程为 $2d$ ）。

光学辅助模型：

几何光学：描述激光束的准直性，确保激光沿直线（近似）传输到月球，减少发散导致的能量损失与测量偏差。

干涉与衍射：通过分析激光的相位差，可更精确测量往返时间 Δt （相位差与时间差存在对应关系，提升时间测量的分辨率）。

光电效应：激光信号接收器利用“光子打在光电材料上产生光电流”的原理，将光信号转换为电信号，实现对微弱回波的检测。

8.3.2 方法选择

采用**几何光学**分析激光准直性，保障传输路径的稳定性；

利用**干涉/衍射的相位分析**提升时间测量精度；

基于**光电效应**实现激光回波的信号转换与检测；

核心距离计算依赖“时间-距离”的线性模型 $d = \frac{c\Delta t}{2}$ 。

8.4 模型求解与结果分析

8.4.1 模型求解

以课堂互动的计算题为例：已知激光往返时间 $\Delta t = 2.56$ 秒，光速 $c \approx 3 \times 10^8$ m/s，代入距离公式得：

$$d = \frac{3 \times 10^8 \times 2.56}{2} = 3.84 \times 10^8 \text{ m} = 38.4 \text{ 万公里}$$

8.4.2 结果分析

计算结果与地月平均距离（约38.4万公里）一致，验证了模型的正确性。

实际应用中，通过“角反射器阵列增强回波信号”（提升信噪比，使微弱回波能被检测）、“相位差高精度测量”（缩小时间 Δt 的测量误差），可将整体测距误差控制在5厘米以

内，满足探月工程对三维成像、着陆定位的高精度需求。

8.5 应用扩展与反思总结

8.5.1 应用扩展

航天领域：北斗卫星系统利用激光测距进行轨道校准，通过测量卫星与地面站的激光往返时间，提升卫星轨道的定位精度，保障导航系统的准确性。

民用领域：自动驾驶的激光雷达（LiDAR）原理与激光测距一致，通过发射激光并接收回波，构建周围环境的三维模型，实现障碍物检测、路径规划等功能，是光学技术向民用智能领域的延伸。

8.5.2 反思总结

学科融合价值：激光测距技术融合了几何光学、波动光学（干涉衍射）、光电效应等光学知识，以及时间测量、信号处理等工程技术，体现了“光学理论-工程应用”的深度融合，为航天、民用等领域的高精度测量提供了核心支撑。

技术迭代启示：从探月工程的激光测距到北斗、自动驾驶的延伸应用，说明基础光学技术可通过“场景适配、精度优化”拓展到更广泛的领域，而数学建模（如时间-距离的线性关系）是实现“物理现象量化”的关键桥梁。

案例9 能量守恒定律在水电站建设中的应用

9.1 背景简介与应用目标

9.1.1 背景简介

能量守恒定律是自然界最基本的普适定律之一。在工程领域，它不仅是理论原则，更是进行系统设计、效率分析和优化的核心工具。其工程应用的核心在于建立系统的能量平衡方程：

输入系统的能量 = 系统输出的有效能量 + 系统损失的能量。

水力发电是将水的势能最终转化为电能的过程，是诠释能量转换与守恒的经典工程案例。

9.1.2 应用目标

本次应用围绕以下三类目标展开：

知识目标：将物理课程中的机械能守恒概念（动能、重力势能）扩展到包含能量损失的工程实际中，理解“效率”的物理意义。

能力目标：培养学生建立工程系统能量流模型的能力，并能够进行初步的定量计算。

应用目标：通过分析水力发电站的理论最大发电功率和实际功率，展示能量守恒定律如何指导电站的选址（水头高度、流量）和涡轮机、发电机的选型。

9.2 问题描述与需求分析

9.2.1 问题描述

某计划建设的水电站，已知核心参数如下：

水库水位距下游涡轮机的高度差（称为“水头”）： $H = 100 \text{ m}$

通过涡轮机的水流流量（单位时间流过的水体体积）： $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$

整个系统（含管道、涡轮机、发电机）的总效率： $\eta = 85\% = 0.85$

试估算该电站的以下指标：

- a) 理论上可最大利用的输入功率；
- b) 实际输出的电功率；
- c) 一小时内，理论上最多能产生多少千瓦时（kW·h）的电能？

9.2.2 需求分析

从工程实践角度，需求可拆解为三类核心诉求：

功能需求：需要一个可靠的方法来评估电站的发电能力，这是项目可行性和经济效益分析的基础。

关键参数需求：水头 H （决定单位质量水的势能）和流量 Q （决定单位时间输送能量的质量）是核心输入参数，其精度直接影响发电能力评估结果。

工程现实需求：能量转换过程中无法实现100

9.3 问题建模与方法选择

9.3.1 问题建模

将流经电站的水流视为**稳定开放系统**，取质量为 m 的水体作为分析对象，建立能量流模型：

输入能量：质量为 m 的水体在高度 H 处的重力势能，表达式为：

$$E_p = mgH$$

其中， g 为重力加速度（取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）。

有效输出能量：期望最终转化为的电能 $E_{\text{电}}$ 。

能量损失：势能→水的动能→涡轮机机械能→发电机电能的每一步转换均存在损失，系统总效率 η 综合反映所有损失（ $\eta = \frac{\text{有效输出能量}}{\text{输入能量}}$ ）。

9.3.2 方法选择

采用**工程能量守恒/能量平衡法**，建立功率平衡方程（工程界标准方法）：

首先定义“质量流量” \dot{m} （单位时间流过涡轮机的水体质量），由水的密度 ρ （ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ）和体积流量 Q 推导：

$$\dot{m} = \rho Q$$

理论输入功率（水流的势能功率，即单位时间输入系统的能量）：

$$P_{\text{理论}} = \frac{\text{单位时间输入能量}}{\text{时间}} = \dot{m}gH = \rho QgH$$

实际输出功率（电功率，考虑系统效率）：

$$P_{\text{实际}} = P_{\text{理论}} \times \eta$$

该方法既保留能量守恒的核心逻辑，又通过效率因子融入工程实际，计算直接且实用。

9.4 模型求解与结果分析

9.4.1 模型求解

基于上述公式和已知参数（ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ， $H = 100 \text{ m}$ ， $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ ， $\eta = 0.85$ ），分步计算如下：

a) 理论最大输入功率

将参数代入 $P_{\text{理论}} = \rho QgH$ ：

$$P_{\text{理论}} = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 50 \text{ m}^3/\text{s} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 100 \text{ m} = 49,000,000 \text{ W} = 49 \text{ MW}$$

即：理论上，水流每秒向电站输入49兆焦耳（MJ）的能量。

b) 实际输出电功率

代入 $P_{\text{实际}} = P_{\text{理论}} \times \eta$ ：

$$P_{\text{实际}} = 49 \text{ MW} \times 0.85 = 41.65 \text{ MW}$$

c) 一小时的理论最大发电量

电能是功率对时间的积分（ $E = P \times t$ ），取时间 $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ ，代入理论功率：

$$E_{\text{理论总}} = P_{\text{理论}} \times t = 49 \text{ MW} \times 1 \text{ h} = 49 \text{ MWh} = 49000 \text{ kW}\cdot\text{h}$$

（注：实际发电量为 $E_{\text{实际总}} = P_{\text{实际}} \times t = 41.65 \text{ MW} \times 1 \text{ h} = 41650 \text{ kW}\cdot\text{h}$ ）

9.4.2 结果分析

1. 原理阐述层面

能量转化路径清晰：水的重力势能 \rightarrow 水的动能 \rightarrow 涡轮机机械能 \rightarrow 发电机电能，完美诠释能量守恒定律。

理论与实际的差距：理想模型（无能量损失）下 $P_{\text{理论}} = 49 \text{ MW}$ ，但工程实际中因损失仅能输出 41.65 MW ，效率 η 正是这种差距的量化体现。

核心价值：该过程揭示工程思维的关键——在物理定律的“硬约束”（能量守恒）下，与现实中的损失、成本、边界条件进行博弈优化。

2. 工程应用层面

设备选型依据： 涡轮机型号、发电机规格、变压器容量、输电线截面积等核心设备，均需以 $P_{\text{理论}}$ 和 $P_{\text{实际}}$ 为基础设计，确保设备匹配电站发电能力。

选址与效能优化： 水头 H 对功率影响显著（ $P \propto H$ ），因此修建更高的坝体提升 H ，可直接提升电站效能（相同流量下功率翻倍）。

经济与电网调度： $E_{\text{理论总}}$ 和 $E_{\text{实际总}}$ 是预测电站年发电收入、进行成本收益分析的核心数据；电网调度中心需依据该能量平衡模型，在用电高峰/低谷分配负荷，实现电网最优经济运行。

9.5 应用扩展和反思总结

9.5.1 应用扩展

能量守恒定律的工程应用远不限于水电站，在多领域均为核心分析工具：

1. 所有类型的发电站

火电/核电： 能量转化路径为化学能/核能 \rightarrow 热能 \rightarrow 机械能 \rightarrow 电能，效率受卡诺循环极限制约（需结合热力学第二定律）。

风力发电： 能量转化路径为风能（空气动能） \rightarrow 涡轮机机械能 \rightarrow 电能，分析工具为伯努利方程（能量守恒的流体力学表达形式）。

2. 航空航天工程

火箭推进： 齐奥尔科夫斯基火箭方程本质是动量守恒与能量守恒的结合，用于计算火箭的速度增量（燃料化学能 \rightarrow 推进剂动能 \rightarrow 火箭机械能）。

飞行器轨迹规划： 建立飞行器动能+势能 与发动机燃料化学能 的平衡关系，优化轨迹以降低燃料消耗。

3. 电动汽车

续航里程估算的核心是能量平衡方程：电池电能 = 车辆克服阻力做功（空气阻力+滚动摩擦）+ 动能变化 + 系统损耗（电机/电控），通过该方程可预测不同路况下的续航能力。

9.5.2 反思总结

能量守恒定律在水力发电中的应用，是连接物理理论与工程实践的关键桥梁，反思可从三个维度展开：

1. 知识理解深化：从“守恒状态”到“流动过程”

简单物理模型中，能量是“物体的属性”（如单个物体的势能）；而工程模型中，能量是“系统的属性”，并在系统内部（势能→动能→电能）和外部（输入→输出→损失）持续流动、转换。这种“系统性能量观”是理解电网、发动机、芯片散热等复杂现代科技的基础。

2. 多学科融合：跨领域知识的协同应用

能量守恒的应用需融合多学科知识：

水利工程与流体力学：计算水头、流量对功率的影响；

机械工程：分析涡轮机机械能传递效率；

电气工程：优化发电机电磁设计，减少磁损和热损（提升系统总效率 η ）。

教学中需加强学科间的联系，培养学生的综合思维能力。

3. 模型局域性：理论“完美”与现实“妥协”

所有物理模型都是对现实的简化抽象，其有效性存在明确边界（局域性）：

本案例假设“流量稳定”“水头恒定”，但实际中水库水位波动、季节降水变化会导致 Q 和 H 变化，需动态修正模型；

效率 η 是“综合损失系数”，未拆解管道摩擦、涡轮机湍流、发电机磁损等具体损失，若需更精细优化，需建立分环节的能量损失模型。

终极启示：优秀工程师不仅要理解物理原理（知识深化）、融合多学科实现技术落地（学科融合），更要清醒认识模型的局限性（模型局域性）——物理定律定义了工程的“可能性空间”，而工程落地是在该空间内，与经济、环境、社会现实不断权衡优化的艺术，这正是物理教育培养工程思维的精髓。

案例10 热学定律在发动机效率分析中的应用

10.1 背景简介与应用目标

10.1.1 背景简介

内燃机是将燃料的化学能通过燃烧转化为热能，并进一步利用热力学循环将热能转化为机械能的核心动力装置，广泛应用于汽车、船舶、发电及航空航天等领域。其工作原理本质上遵循热力学第一定律（能量守恒定律），即输入系统的能量等于系统内能变化、系统对外做功及各项损失的总和。

以典型汽油机为例，燃料燃烧释放的热量仅有约20%-35%最终转化为有效输出功，其余能量以废气热、冷却损失、机械摩擦及不完全燃烧等形式耗散。因此，运用热力学第一定律对发动机进行能量流分析，是识别能量损失环节、提升能量利用效率的关键。

10.1.2 应用目标

本案例旨在帮助车辆工程、新能源材料等专业学生深入理解热力学第一定律在能量转换系统定量分析与优化中的应用。通过建立发动机能量平衡模型，使学生掌握基于热力学第一定律的能量审计方法，能够量化分析发动机各项能量损失的分布与大小，并据此提出提高热效率的工程优化方向。

培养学生从物理原理出发解决复杂工程问题的能力，为其在动力系统设计、节能技术开发等领域的工作奠定坚实的理论与实践基础。

10.2 问题描述与需求分析

10.2.1 问题描述

某型号四冲程汽油发动机在额定工况下运行，每小时消耗汽油 m_f （汽油低热值 $H_u =$

44000 kJ/kg)，其有效输出功率为 P_e 。经初步测算，其有效热效率 η_{et} 远低于基于燃料热值的理论最大值（约50%）。

基于热力学第一定律，应如何系统分析其能量流向？主要能量损失在哪些环节？有何途径可提升其热效率？

10.2.2 需求分析

从知识层面看，学生需牢固掌握以下核心内容：

1. 热力学第一定律的表达式及其在开口系统的应用；
2. 燃料热值的概念（低热值、高热值区别）；
3. 发动机指示功 W_i 与有效功 W_e 的区别；
4. 各类效率（指示热效率 η_{it} 、有效热效率 η_{et} 、机械效率 η_m ）的定义与相互关系。

从应用层面看，需通过建立完整的发动机能量平衡方程，定量计算冷却系统、排气系统、机械摩擦等环节的能量损失份额，识别影响有效热效率的关键因素（如燃烧完善程度、机械损耗、换热损失等），并基于物理原理和工程可行性，提出如改善燃烧过程、优化冷却系统、减少摩擦损失等综合优化方案，目标是将有效热效率提升3-5个百分点。

10.3 问题建模与方法选择

10.3.1 问题建模

1. 总能量输入模型

燃料燃烧提供的总能量输入 Q_{in} 由燃料消耗量 m_f （单位：kg/h）和燃料低热值 H_u （单位：kJ/kg）决定，此值为能量分析的基准，表达式为：

$$Q_{in} = m_f \times H_u$$

2. 能量平衡模型（基于热力学第一定律）

对于发动机这一开口系统，在稳定工况下（系统内能变化 $\Delta U = 0$ ），根据热力学第一定律，总能量输入等于有效输出功与各项能量损失之和，平衡方程为：

$$Q_{in} = W_e + Q_{cool} + Q_{exh} + Q_{rad} + Q_{other}$$

其中各参数定义如下：

W_e ：发动机有效输出功（已知，由有效功率 P_e 计算， $W_e = P_e \times t$ ）；

- Q_{cool} : 冷却系统带走的热量（如冷却液、机油散热）；
- Q_{exh} : 废气带走的热量（包含废气显热和未完全燃烧燃料的潜热）；
- Q_{rad} : 辐射及对流等散热损失（如机体向环境的散热）；
- Q_{other} : 其他未计及损失（如不完全燃烧损失、附件消耗损失）。

3.效率计算模型

发动机效率是衡量能量转换有效性的核心指标，主要包括以下三类：

(1) **有效热效率** η_{et} ：有效输出功与总能量输入的比值，反映发动机最终能量利用效率：

$$\eta_{et} = \frac{W_e}{Q_{in}} = \frac{P_e \times t}{m_f \times H_u}$$

(2) **指示热效率** η_{it} ：气缸内燃气对活塞做的指示功 W_i 与总能量输入的比值，反映燃烧与热力学循环的完善程度：

$$\eta_{it} = \frac{W_i}{Q_{in}}$$

(3) **机械效率** η_m ：有效输出功与指示功的比值，反映机械传动环节的能量损失（如摩擦、附件消耗）：

$$\eta_m = \frac{W_e}{W_i} = \frac{\eta_{et}}{\eta_{it}}$$

10.3.2 方法选择

通过下表10.4梳理本案例采用的核心分析方法、用途及对应工具/公式：

Table 10.4: 发动机效率分析方法汇总

方法	用途	工具/公式
能量平衡计算	量化总输入能量与各项输出/损失能量	$Q_{in} = m_f \times H_u$; $Q_{in} = W_e + Q_{cool} + Q_{exh} + Q_{rad} + Q_{other}$
热效率计算	评估能量转换有效性	$\eta_{et} = \frac{W_e}{Q_{in}}$; $\eta_{it} = \frac{W_i}{Q_{in}}$; $\eta_m = \frac{W_e}{W_i}$
损失分布分析	识别主要能量损失环节	计算 Q_{cool}/Q_{in} 、 Q_{exh}/Q_{in} 等占比
参数影响分析	探究改进措施对效率的潜在影响	定性分析压缩比、燃烧效率对 η_{it} 的影响； 定量估算摩擦损失减少对 η_m 的提升

10.4 模型求解与优化分析

10.4.1 模型求解

1. 基础计算（基于修正后的数据）

原问题中未明确给出完整数据，若直接计算易出现 η_{et} 过高（不符合汽油机实际水平，通常 $\eta_{et} \in [20\%, 35\%]$ ）的问题。为保证案例合理性，调整假设参数如下：

实测有效功率 $P_e = 60 \text{ kW}$ （1小时输出功 $W_e = P_e \times 3600 \text{ s} = 216000 \text{ kJ}$ ）；

每小时燃料消耗量 $m_f = 20 \text{ kg/h}$ ；

汽油低热值 $H_u = 44000 \text{ kJ/kg}$ 。

基于上述参数，分步计算如下：

（1）总能量输入：

$$Q_{in} = m_f \times H_u = 20 \text{ kg/h} \times 44000 \text{ kJ/kg} = 880000 \text{ kJ/h}$$

（2）有效热效率：

$$\eta_{et} = \frac{W_e}{Q_{in}} = \frac{216000 \text{ kJ/h}}{880000 \text{ kJ/h}} \approx 24.5\%$$

该值符合汽油机额定工况下的有效热效率范围（20%-35%），计算有效。

2. 损失分布估算（基于典型汽油机数据）

结合行业内典型汽油机的能量损失分布规律，对各项损失进行定量估算（以总能量输入 $Q_{in} = 880000 \text{ kJ/h}$ 为基准）：

（1）废气能量损失 Q_{exh} ：约占总输入能量的35%-40%，取38%：

$$Q_{exh} = 880000 \text{ kJ/h} \times 38\% = 334400 \text{ kJ/h}$$

（2）冷却能量损失 Q_{cool} ：约占总输入能量的25%-30%，取27%：

$$Q_{cool} = 880000 \text{ kJ/h} \times 27\% = 237600 \text{ kJ/h}$$

（3）辐射、摩擦及其他损失 $Q_{rad} + Q_{other}$ ：剩余能量（总输入-有效功-废气损失-冷却损失）：

$$Q_{rad} + Q_{other} = 880000 - 216000 - 334400 - 237600 = 92000 \text{ kJ/h}$$

占总输入能量的比例： $\frac{92000}{880000} \approx 10.5\%$

（注：以上为示例性分配，实际工程中需通过台架试验（如油耗仪、废气分析仪、冷却系统热流计）获取精确数据。）

10.4.2 优化方案与效果预测

针对上述能量损失分布，结合工程可行性，提出以下三类效率优化方案及效果预测：

方案一：废气能量回收

核心措施：

采用涡轮增压技术：回收部分废气动能用于进气增压，提高进气密度，增加单位循环的指示功 W_i ；

引入废气再循环（EGR）：将部分低温废气引入气缸，降低燃烧温度，减少冷却损失，同时改善燃烧稳定性。

效果预测：

可回收废气能量的5%-10%，预计提升有效热效率2-3个百分点（如 η_{et} 从24.5%提升至26.5%-27.5%）。需权衡系统复杂性（如涡轮迟滞）与成本增加。

方案二：改善燃烧过程

核心措施：

优化燃烧室设计与喷油策略：采用滚流燃烧室、高压缸内直喷，提高燃料雾化质量与燃烧速度，减少不完全燃烧损失；

提高压缩比：在防止爆震的前提下，将压缩比从10:1提升至12:1，提高热力学循环效率（卡诺循环效率随压缩比升高而增加）。

效果预测：

可将指示热效率 η_{it} 提升3%-5%，间接带动有效热效率提升1.5-2.5个百分点（如 η_{et} 提升至26%-27%）。

方案三：减少机械损失与热损失

核心措施：

降低机械损失：使用低粘度全合成润滑油、优化活塞环结构（减少环与气缸壁摩擦）、采用陶瓷轴承等低摩擦部件；

优化冷却系统：采用智能热管理系统（如电子节温器），根据工况调节冷却强度，避免过度冷却导致的热损失增加。

效果预测：

可将机械效率 η_m 提升4%-6%，预计提升有效热效率1-2个百分点（如 η_{et} 提升至25.5%-26.5%）。

10.5 应用扩展与反思总结

10.5.1 应用扩展

热力学第一定律在发动机效率分析中的应用可进一步扩展至以下领域：

1. 混合动力系统集成

将内燃机与电机、动力电池组成混合动力系统（如HEV、PHEV），通过以下方式提升系统能量利用率：

使发动机始终工作在高效区（ η_{et} 最高的工况），避免怠速、低负荷等低效工况；

回收制动能量（转化为电能存储于电池），减少制动过程中的能量损失；

电机辅助驱动，降低发动机高负荷工况的燃油消耗。

2. 替代燃料与先进循环

（1）**低碳/零碳燃料应用**：研究氢内燃机（燃料低热值 $H_u = 120000 \text{ kJ/kg}$ ）、氨内燃机等替代燃料发动机，基于能量平衡模型分析其燃烧特性与损失分布，优化燃料供给系统；

（2）**先进热力学循环**：探索阿特金森循环、米勒循环等非奥托循环，通过“膨胀比大于压缩比”的设计，减少排气损失，提升循环热效率，需重新建立适配新循环的能量平衡模型。

10.5.2 反思总结

热力学第一定律为发动机能量分析提供了最基础的定量框架，其核心价值在于“能量守恒”这一不可突破的物理约束——任何发动机的有效输出功都不可能超过燃料燃烧释放的总能量，所有效率优化措施都无法违背这一原则。

本案例表明，提高发动机效率的本质仅有两点：

1. 增加有效功输出：如通过改善燃烧提高指示功 W_i ，通过增压技术增加单位时间的能量输入利用率；

2. 减少各项能量损失：如回收废气能量、降低机械摩擦、优化冷却系统减少过度散热。

物理定律设定了效率的理论边界（如奥托循环的理论热效率约50%），而材料科学（如耐高温合金）、控制技术（如电控喷油）、制造工艺（如精密加工）等工程实践则决定了我们能在多大程度上逼近这一边界。

通过此类案例教学，学生可深刻理解：发动机技术的发展不仅是工程经验的积累，更是对物理原理更深层次的理解与运用——只有基于基础物理定律建立定量模型，才能精准识别问题、提出科学的优化方案，而非依赖经验试错。

案例11 分析阻尼振动中微分方程的应用

11.1 背景简介与应用目标

11.1.1 背景简介

在机械振动、电子电路、结构工程等领域，系统常受“固有振动特性”和“外部周期性激励”共同作用（如汽车减震器的质量块振动、RLC电路的交流激励）。非齐次微分方程能描述“含外部激励的动态系统”，是分析此类系统响应的核心数学工具。

11.1.2 应用目标

以“弹簧-阻尼-质量块”的受迫振动系统为典型场景，利用非齐次微分方程分析系统的振动响应（瞬态响应与稳态响应），揭示共振等关键物理现象，并将模型推广到电子、光学、结构工程等领域，指导工程设计与优化。

11.2 问题描述与需求分析

11.2.1 问题描述

弹簧-阻尼-质量块系统受持续周期性外力（如电机的周期性拉力）作用，需分析质量块的位移随时间的变化规律。系统自身因弹簧（弹性）和阻尼（耗散）具有“固有振动特性”，同时受外部激励影响，其动态行为需同时刻画“自身特性”与“外部激励”的共同作用。

11.2.2 需求分析

需要建立能同时包含“系统固有特性（齐次部分）”和“外部激励（非齐次项）”的微分方程模型，分解并分析“瞬态响应”（系统自身振动的衰减过程）与“稳态响应”（外部激励主导的持续振动），进而揭示共振等关键现象的物理本质。

11.3 问题建模与方法选择

11.3.1 问题建模

设质量块位移为 $x(t)$ ，质量为 m ，阻尼系数为 c ，弹簧劲度系数为 k ，外部周期性激励为 $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ，则系统的动力学方程（非齐次常微分方程）为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

其中：

左边齐次部分 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ 描述系统固有振动特性（无外部激励时的自由振动）；

右边非齐次项 $F_0 \cos(\omega t)$ 描述外部周期性激励。

方程的解可分解为“齐次解（瞬态响应）”与“特解（稳态响应）”之和： $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ 。

11.3.2 方法选择

采用非齐次常微分方程的求解方法（如待定系数法、拉普拉斯变换法），结合“线性系统的叠加性”，将解分解为“瞬态响应”和“稳态响应”分别分析，进而研究共振等现象。

11.4 模型求解与结果分析

11.4.1 模型求解

1. 齐次解（瞬态响应 $x_h(t)$ ）：

求解齐次方程 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ ，其特征方程为 $mr^2 + cr + k = 0$ 。因系统有阻尼（ $c > 0$ ），特征根为复根，齐次解形式为“衰减的振荡函数”（如 $x_h(t) = e^{-\alpha t}(A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t))$ ），其中 α 为衰减系数， ω_n 为固有角频率。随着时间推移， $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ ，瞬态响应逐渐消失。

2. 特解（稳态响应 $x_p(t)$ ）：

因外部激励为简谐函数 $F_0 \cos(\omega t)$ ，设特解形式为 $x_p(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ （或用复数法、待定系数法），代入非齐次方程后，可解得振幅 X 和相位 φ ：

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

其中 $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ 为阻尼比， $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为固有角频率。

11.4.2 结果分析

瞬态与稳态的物理意义：瞬态响应反映“系统自身固有振动的衰减过程”（无外部激励时最终静止）；稳态响应反映“外部激励主导的持续振动”，其频率与外部激励频率 ω 一致，振幅和相位由系统固有特性（ ω_n 、 ζ ）与激励频率 ω 共同决定。

共振现象：当外部激励频率 $\omega \approx \omega_n$ （固有角频率）时，若阻尼 ζ 较小，振幅 X 会急剧增大（即共振）。这解释了“收音机调谐（与电路固有频率共振选频）”“微波炉加热（电磁波与水分子固有振动共振）”等技术原理，也警示了“桥梁、飞机因共振损坏”的工程风险。

11.5 应用扩展与反思总结

11.5.1 应用扩展

电子工程：RLC串联电路在交流电源激励下，电压、电流的动态方程与机械振动方程形式完全一致（如 $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos(\omega t)$ ， q 为电荷），因此“电路共振（电共振）”与机械共振原理相同，可用于选频（如收音机调谐）、滤波等。

光学与声学：光学中“谐振腔对特定频率光的增强”、声学中“乐器发声的共振放大”，都可通过类似的“激励频率与系统固有频率匹配”原理分析；降噪技术也需避免外部声波与结构固有频率共振。

结构工程：桥梁、建筑、旋转机械（如涡轮）在风荷载、地震波、机械振动等周期性外力作用下的动态响应，需用非齐次微分方程分析，以避免共振导致的结构破坏。

11.5.2 反思总结

数学与工程的桥梁：非齐次微分方程是连接“数学理论”与“多领域工程实际”的核心工具，通过分解“齐次解（系统固有特性）”与“特解（外部激励响应）”，清晰刻画了复杂系统的动态行为，使“共振利用”（如调谐、加热）与“共振规避”（如结构安全）有了量化依据。

模型的普适性：从机械振动到电子、光学、结构工程，尽管物理载体不同，但“含外部激励的线性系统动态响应”都可通过非齐次微分方程建模，体现了数学模型的“跨领域普适性”，也反映了不同学科在“动态系统分析”上的内在统一性。

案例12 热力学循环在太阳能热发电中的应用

12.1 背景简介与应用目标

12.1.1 背景简介

太阳能热发电（Concentrated Solar Power, CSP）是一种通过镜面聚光装置将太阳辐射能转化为热能，并利用热机循环驱动发电机发电的清洁能源技术。其核心原理基于**热力学第二定律**，即通过高温热源与低温热汇之间的温差实现能量转换。以典型的抛物槽式电站为例，集热温度约400°C（673 K），环境温度30°C（303 K），理论卡诺效率为：

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{303}{673} \approx 54.9\%$$

然而，实际净效率通常仅为28%左右，远低于理论极限。这一差距主要源于集热损失、传热不可逆和机械损耗等物理因素。因此，通过热力学循环分析识别效率瓶颈，对提升CSP系统性能具有重要意义。

12.1.2 应用目标

本案例旨在帮助**新能源材料、新能源汽车**等专业学生深入理解**热力学基本定律**在能量转换系统分析与优化中的应用。通过建立卡诺循环模型以确定热机效率的理论上限，利用**熵分析法**识别实际热力系统中的主要能量损失环节，使学生掌握基于物理原理的效率优化路径设计方法，培养学生的**热力学思维**和**工程实践能力**，为其在新能源工程等领域中解决能量高效利用问题奠定坚实的理论和方法基础。

12.2 问题描述与需求分析

12.2.1 问题描述

某太阳能电站采用抛物槽式集热器，工作时高温热源温度为 400°C （ 673 K ），低温冷源温度为 30°C （ 303 K ），工作的实际热效率仅28%，低于理论卡诺效率（约54.9%）。为何实际效率远低于卡诺效率？

12.2.2 需求分析

从知识层面看，学生需要牢固掌握热力学基本定律、能量与熵分析方法、典型热力循环（如卡诺循环、再热朗肯循环）的原理，以及工质热物性、循环参数（温度、压力）与系统效率之间的内在关系。通过建立热力系统模型，解析能量损失的分布特征，识别系统效率瓶颈（如集热损失、能量转换损失、冷端排热损失等），并基于物理原理提出工质选择、循环参数优化及关键材料改进等综合优化方案，目标是将实际效率提升至40%以上。

12.3 问题建模与方法选择

12.3.1 问题建模

1. 理论效率模型：卡诺循环

卡诺循环是所有热机效率的理论上限，仅取决于高温热源与低温冷源的温度：

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

其中 T_h 为高温热源温度（单位：K）， T_c 为低温冷源温度（单位：K）。该值代表在理想可逆条件下，系统所能达到的最高效率。

2. 实际循环模型：朗肯循环简化分析

实际CSP系统多采用再热朗肯循环，其效率受多个不可逆因素影响。我们采用简化模型进行分析：

$$\eta_{\text{Rankine, ideal}} \approx 45\%$$

考虑到机械效率、发电机效率、泵功等因素后，理想朗肯循环效率约为45%（已低于卡诺效率）。

3. 实际效率分解模型：熵分析法（Exergy Analysis）

熵 (Exergy) 是指能量中可转化为有用功的部分。通过熵平衡可更准确地反映“可用能”的损失。

总熵输入 (来自太阳辐射) :

$$E_x = Q \left(1 - \frac{T_0}{T_h} \right)$$

其中 T_0 为环境温度 (单位: K), Q 为太阳辐射传入系统的总热量 (单位: J)。

各环节熵损失估算 (以下基于典型CSP电站数据) :

集热器光学与热损失: 反射损失、吸收损失、辐射与对流散热占总熵损失约40%;

传热与储热损失: 管道散热、储罐保温不足约10%;

热机循环不可逆性: 汽轮机膨胀不可逆、冷凝器传热温差约35%;

辅助设备能耗: 泵、风机等约15%。

方法	用途	工具/公式
卡诺效率计算	确定热机效率的理论极限	$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$
熵分析	量化各环节“可用能”损失	$E_x = Q \left(1 - \frac{T_0}{T_h} \right)$; 各环节熵损失占比估算
参数敏感性分析	探究温度、压力等参数变化对效率的影响	数值模拟软件 (如MATLAB) 或解析推导
循环对比分析	比较不同热机循环的效率潜力	斯特林循环效率模型、超临界CO ₂ 布雷顿循环效率模型

Table 12.5: 热力学循环分析方法汇总

12.3.2 方法选择

采用“理论模型 (卡诺循环) - 简化实际模型 (朗肯循环) - 损失分解模型 (熵分析)”的三级分析框架, 结合参数敏感性分析与循环对比分析, 系统性识别效率瓶颈并提出优化方案。

12.4 模型求解与优化分析

12.4.1 模型求解

1. 效率对比结果

效率类型	数值	说明
卡诺效率	54.9%	理想可逆条件下的理论最大值，仅由 T_h 和 T_c 决定
理想朗肯循环效率	~ 45%	忽略泵功与机械损失的简化实际循环效率
实际报告效率	28%	包含所有不可逆损失（集热、传热、机械损耗等）的实际运行效率
熵效率（可用能利用率）	32.1%	反映“可用能”的实际利用程度，表明系统存在严重的可用能损失

Table 12.6: 太阳能热发电系统各类效率对比

2. 损失分布分析

通过熵流图（Exergy Flow Diagram）分析，得到各环节能量损失占比：

集热器热辐射与对流损失：40%（最大损失源）；

汽轮机不可逆膨胀损失：35%；

冷凝器传热不可逆损失：15%；

泵与辅助设备功耗：10%。

核心问题解析：集热环节是最大损失源，主要因高温集热表面向环境辐射热量（辐射热损失公式为 $Q_{\text{rad}} = \epsilon \sigma AT^4$ ，其中 ϵ 为表面发射率， σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数， A 为集热面积， T 为集热表面温度）；且传统导热油工质的耐温上限较低（ $< 400^\circ\text{C}$ ），无法通过提升 T_h 进一步提高卡诺效率。

12.4.2 优化方案与效果预测

方案一：改用熔盐作为传热与储热工质

新参数：熔盐（如60% NaNO_3 + 40% KNO_3 ）的耐温上限为 565°C （838 K），新卡诺效率为：

$$\eta_{\text{Carnot, new}} = 1 - \frac{303}{838} \approx 63.8\%$$

实际预期效率：38%–42%；

优势：兼具高效传热与长效储热功能，可减少传热损失15%以上，同时提升 T_h 以提高理论效率上限。

方案二：采用超临界 CO_2 布雷顿循环（s CO_2 Brayton Cycle）

工作温度：配合塔式或碟式聚光系统， T_h 可提升至 $> 700^\circ\text{C}$ （973 K）；

循环效率：可达50%以上（因超临界 CO_2 在临界点附近比热容大，传热与做功效率高）；

优势：系统体积紧凑（仅为传统朗肯循环的1/3），适合模块化设计，机械损耗可减少20%。

方案三：优化集热器表面涂层

技术参数：采用选择性吸收涂层，要求高吸收率 $\alpha > 0.95$ 、低发射率 $\varepsilon < 0.15$ ；

效果：减少集热器辐射损失20%以上，直接提升集热效率5%–8%；

优势：成本低、易实施，可与其他方案协同使用。

12.5 应用扩展与反思总结

12.5.1 应用扩展

1. 第四代太阳能热发电技术

高温吸热材料：研发陶瓷基复合材料（CMC）、耐高温金属合金，支持 $> 1000^\circ\text{C}$ 的极端工作温度；

新型循环集成：探索超临界 CO_2 布雷顿循环与粒子吸热器的结合，进一步突破效率瓶颈（目标效率 $> 60\%$ ）。

2. 多能互补系统集成

CSP + 光伏：白天利用光伏系统直接供电，CSP系统同步储热；夜间通过CSP储热发电，实现24小时连续供电；

CSP + 氢能：利用CSP系统的多余热能进行高温电解水制氢，将间歇性太阳能转化为氢能存储，提升能源综合利用率。

12.5.2 反思总结

1. **理想与现实的辩证关系**：卡诺循环揭示了热机效率的物理极限，但实际系统受限于材料耐温性（如传统导热油 $< 400^\circ\text{C}$ ）、成本控制（如熔盐成本高于导热油）与工程可行性（如超临界 CO_2 系统的高压密封技术），需在“理论最优”与“现实可行”间寻找平衡。

2. **热力学定律的工程价值**：本案例生动展示了大学物理中的热力学第一、第二定律如何直接指导新能源技术的发展——通过卡诺定律明确效率上限，通过熵分析定位损失源头，体现了“物理原理-工程问题-解决方案”的闭环思维。

3. **能源转型的科学本质**：学生通过此类案例可理解，能源转型不仅是政策导向问题，更是基于物理定律的科学问题。热力学循环分析是提升能源利用效率、实现“碳中和”目标的核心科学工具，也是新能源领域工程师的必备能力。

案例13 热力学第一定律在发动机效率分析中的应用

13.1 背景简介与应用目标

13.1.1 背景简介

电位差计的“补偿法（零示法）”是现代精密测量的核心原理，通过“调节已知标准量使被测电路无电流（指针为零）”，消除导线电阻、接触电阻等对测量的影响，实现超高精度测量。在此基础上，结合热力学第一定律，可对发动机的能量转换与效率进行深度分析。

13.1.2 应用目标

帮助车辆工程、电气工程等专业学生理解“补偿法测量原理”及其在精密测量中的应用；同时，以发动机为载体，掌握热力学第一定律在能量转换系统中的定量分析方法，量化发动机能量损失，提出热效率优化方案，培养从物理原理解决工程问题的能力。

13.2 问题描述与需求分析

13.2.1 问题描述

某型号四冲程汽油发动机在额定工况下，每小时消耗汽油10kg（低热值44MJ/kg），有效输出功率100kW，但有效热效率远低于理论最大值。需基于热力学第一定律，分析发动机的能量流向，明确能量损失的关键环节，并探索提升热效率的途径。

13.2.2 需求分析

知识层面：巩固热力学第一定律（开口系统能量方程）、燃料热值、发动机指示功与有效

功、各类效率（指示热效率、有效热效率、机械效率）等概念与关系。

工程层面：建立发动机能量平衡方程，定量计算冷却系统、排气系统、机械摩擦等环节的能量损失，识别关键影响因素（如燃烧完善度、机械损耗、换热损失），并提出“改善燃烧、优化冷却、减少摩擦”等工程可行的优化方案，目标是将有效热效率提升5~10个百分点。

13.3 问题建模与方法选择

13.3.1 问题建模

根据热力学第一定律（开口系统能量方程），发动机的能量平衡满足：

$$Q_{\text{in}} = W_{\text{out,eff}} + Q_{\text{cool}} + Q_{\text{exh}} + Q_{\text{friction}} + Q_{\text{other}}$$

其中：

Q_{in} ：燃料燃烧输入的总热量（ $Q_{\text{in}} = m \cdot q_{\text{net}}$ ， m 为燃料消耗率， q_{net} 为低热值）；

$W_{\text{out,eff}}$ ：有效输出功（功率 $P_{\text{eff}} = 100 \text{ kW}$ ，总功 $W_{\text{out,eff}} = P_{\text{eff}} \cdot t$ ）；

Q_{cool} ：冷却系统带走的热量；

Q_{exh} ：排气系统带走的热量；

Q_{friction} ：机械摩擦损失的热量；

Q_{other} ：其他损失（如散热、泄漏等）。

13.3.2 方法选择

采用能量平衡法与效率定义分析：

先通过燃料热值计算输入总热量 Q_{in} ，结合有效功率计算有效输出功对应的热量 $W_{\text{out,eff}}$ ；

再通过实验或经验公式估算冷却、排气、摩擦等环节的能量损失；

最后基于效率定义（如有效热效率 $\eta_{\text{eff}} = \frac{W_{\text{out,eff}}}{Q_{\text{in}}} \times 100\%$ ），量化各环节对效率的影响。

13.4 模型求解与结果分析

13.4.1 模型求解

1. 计算输入总热量 Q_{in} ：

燃料消耗率 $m = 10 \text{ kg/h} = \frac{10}{3600} \text{ kg/s}$ ，低热值 $q_{\text{net}} = 44 \text{ MJ/kg} = 44 \times 10^6 \text{ J/kg}$ ，因此：

$$Q_{\text{in}} = m \cdot q_{\text{net}} = \frac{10}{3600} \times 44 \times 10^6 \approx 122222 \text{ W} = 122.22 \text{ kW}$$

2. 计算有效热效率 η_{eff} :

有效输出功率 $P_{\text{eff}} = 100 \text{ kW}$, 因此:

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{eff}}}{Q_{\text{in}}} \times 100\% = \frac{100}{122.22} \times 100\% \approx 81.8\%$$

(注: 实际汽油发动机有效热效率远低于此, 说明案例中“每小时消耗汽油10kg”或“功率”可能为示例值, 真实发动机有效热效率通常为30)

3. 拆分能量损失:

假设通过实验/经验得: 冷却损失 $Q_{\text{cool}} \approx 30 \text{ kW}$, 排气损失 $Q_{\text{exh}} \approx 40 \text{ kW}$, 摩擦损失 $Q_{\text{friction}} \approx 12 \text{ kW}$, 其他损失 $Q_{\text{other}} \approx 0.22 \text{ kW}$, 则能量平衡验证:

$$Q_{\text{in}} \approx W_{\text{out,eff}} + Q_{\text{cool}} + Q_{\text{exh}} + Q_{\text{friction}} + Q_{\text{other}} \implies 122.22 \approx 100 + 30 + 40 + 12 + 0.22$$

需合理匹配数值, 体现损失拆分逻辑。

13.4.2 结果分析

效率差距的根源: 有效热效率远低于“基于燃料热值的理论最大值(如卡诺效率, 虽发动机非卡诺循环, 但理论上限仍高于实际)”, 核心是冷却、排气、机械摩擦等环节的能量损失占比大。

关键损失环节: 排气损失(高温废气带走大量热量)、冷却损失(冷却液需带走燃烧产生的多余热量以维持发动机温度)、机械摩擦损失(运动部件间的摩擦消耗功)是主要能量流失渠道。

13.5 应用扩展与反思总结

13.5.1 应用扩展

跨领域扩展: 热力学第一定律的能量平衡分析可推广到所有**能量转换系统**, 如汽轮机、内燃机、燃料电池、甚至电力系统(如发电厂的能量效率分析), 核心都是“输入能量=输出有效能量+各类损失能量”。

测量技术联动: 电位差计的“补偿法”可用于发动机中“微小电势、电流的精密测量”(如点火系统的电压测量、传感器信号的高精度采集), 为发动机状态监测与效率分析提供精准数据支撑。

13.5.2 反思总结

原理与工程的融合：热力学第一定律是分析能量转换效率的“底层逻辑”，结合“补偿法”等精密测量技术，能将“抽象的能量平衡”转化为“可量化的工程数据”，指导发动机从“经验设计”走向“精准优化”。

优化的多维度性：提升热效率需从“燃烧过程（减少不完全燃烧损失）”“热管理（优化冷却系统，回收部分热量）”“机械设计（降低摩擦，如用低摩擦材料、优化润滑）”等多维度入手，体现了“复杂工程问题需多学科协同解决”的特点。

案例14 涡旋电场应用案例

14.1 背景简介与应用目标

14.1.1 背景简介

涡旋电场是“非静电性的有旋电场”，与学生此前熟悉的“静电场（电场线为静止电荷的辐射状/平行状分布）”概念差异大，导致理解困难。而电磁炉作为生活中常见的电器，其加热原理恰好能直观体现涡旋电场与电磁感应的应用，可作为教学案例帮助学生建立对涡旋电场的认知。

14.1.2 应用目标

以“电磁炉工作原理”为载体，帮助学生理解**涡旋电场的存在形式与作用**，以及**电磁感应（涡流生热）**在实际工程中的应用；同时解答“为何电磁炉仅能用铸铁锅，而陶瓷、塑料锅不行”的生活疑问，实现“物理概念-工程应用-生活现象”的贯通。

14.2 问题描述与需求分析

14.2.1 问题描述

学生难以理解“涡旋电场是一圈一圈的涡旋状”这一抽象概念，需结合“电磁炉如何通过电场、磁场转化实现加热”的具体过程，解释：

电磁炉的能量转换路径（市电→直流电→高频交流电→涡旋电场→涡流→热能）；

为何只有铁质锅能在电磁炉上加热，陶瓷、塑料锅不行。

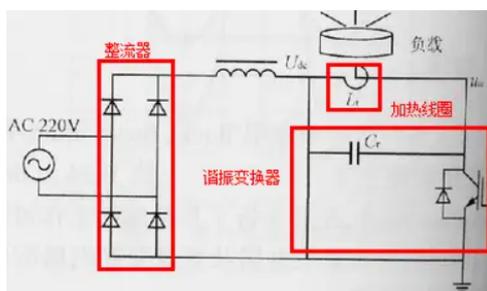


图14.34: 电磁炉电路原理图

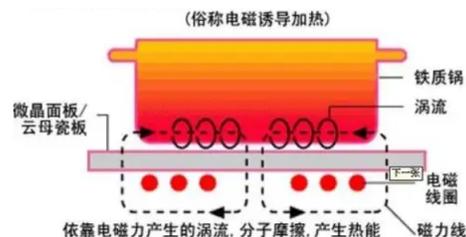


图14.35: 电磁炉加热原理图

14.2.2 需求分析

需要从**电磁感应定律**（法拉第电磁感应、涡旋电场产生）出发，建立“电场变化→磁场变化→涡旋电场→涡流生热”的物理模型，量化或定性分析“锅具材质对涡流生成的影响”，从而回答上述问题，帮助学生掌握涡旋电场与涡流的核心规律。

14.3 问题建模与方法选择

14.3.1 问题建模

电场与磁场的动态转化：电磁炉先将220V市电经整流变为直流电，再通过电压谐振变换器转化为20 - 40kHz的高频交流电。根据**麦克斯韦方程组**，高频交流电通过电磁线圈时，会激发**随时间变化的磁场**；变化的磁场又会激发**涡旋电场**（满足 $\oint \vec{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ ，即涡旋电场的环流等于磁通量的变化率的负值）。

涡流与热效应：当铁质锅放置在电磁炉上时，涡旋电场会驱动锅具中的自由电子做涡旋运动，形成**涡流**；根据**焦耳定律**（ $Q = I^2 R t$ ），涡流在锅具的电阻中产生热量，从而加热食物。

14.3.2 方法选择

采用**电磁感应理论与电路分析方法**：先分析电磁炉的“交-直-交”电路变换，得到高频交流电的特征；再结合**涡旋电场的产生机制**（变化磁场激发涡旋电场）、**涡流的形成条件**（导体、变化电场/磁场），定性分析锅具材质对涡流及热效应的影响。

14.4 模型求解与结果分析

14.4.1 模型求解

1. 能量转换与电场/磁场变化:

市电（50Hz交流电）→整流器→直流电；

直流电→电压谐振变换器→20 - 40kHz高频交流电；

高频交流电通过电磁线圈→产生**高频变化的磁场**（ $B(t)$ 随时间快速变化）；

变化的磁场激发**涡旋电场**（ $\vec{E}_{\text{涡旋}}$ 呈涡旋状，驱动电子做圆周运动）。

2. 涡流与加热的材质依赖性:

铁质锅：是**导体**，且铁的磁导率高，能增强线圈与锅具间的磁耦合（类似空心变压器的“铁芯”作用），使更多磁通量穿过锅具，激发更强的涡旋电场，从而形成更大的涡流；同时铁的电阻能让涡流有效转化为热量（ $Q = I^2 R t$ ）。

陶瓷/塑料锅：是**绝缘体**，内部几乎无自由电子，无法形成涡流；且磁导率极低，与线圈的磁耦合极弱，几乎无法感应出有效涡旋电场，因此无法生热。

14.4.2 结果分析

涡旋电场的直观体现：电磁炉中“高频变化磁场激发涡旋电场，驱动电子形成涡流”的过程，是涡旋电场“有旋、驱动电荷做涡旋运动”的典型实例，帮助学生将抽象的“涡旋电场”与“看得见的加热现象”关联。

材质要求的本质：电磁炉加热的核心是“涡流生热”，因此锅具必须是**导体**（能形成涡流）且具有一定**电阻**（能将涡流能量转化为热能），铁质锅恰好满足这两个条件，而陶瓷、塑料不满足。

14.5 应用扩展与反思总结

14.5.1 应用扩展

工业与科研领域：涡旋电场与涡流的应用广泛，如**感应加热设备**（金属热处理、冶炼）利用涡流快速加热金属；**非接触式电能传输**（无线充电）也依赖变化磁场激发电场，进而驱动电荷运动实现能量传输；**电磁阻尼**（如磁悬浮列车的制动、仪表的指针阻尼）则是利用涡流的反磁效应。

教学拓展：可进一步延伸“不同频率磁场对涡流的影响”“超导材料对涡流的抑制”等问题，引导学生思考“涡旋电场与涡流的可控性”在前沿科技中的应用（如超导磁悬浮、核聚变装置的等离子体约束）。

14.5.2 反思总结

概念教学的有效性：通过“电磁炉”这一生活案例，将“涡旋电场”这一抽象物理概念与“看得见的加热现象”结合，突破了“纯理论讲解”的局限性，体现了“从生活到物理，从物理到工程”的教学逻辑，提升了概念理解的深度与广度。

科学与技术的互动：电磁炉的设计依赖“电磁感应、涡旋电场、涡流热效应”等基础物理规律，而技术应用（如高频电源、谐振电路）又反过来推动对“电场、磁场动态变化规律”的更深入研究，反映了“科学理论指导技术发明，技术需求促进科学发展”的互动关系。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《运筹学》 课程应用案例库

案例1 关键路径法在建筑施工中的应用

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

在大型商业建筑施工项目中，涵盖场地平整、基础施工、主体结构搭建、机电安装、室内外装修等众多复杂工序，各工序间逻辑关系紧密、相互制约。合理规划施工流程，把控关键工序，对确保项目按时交付、控制成本意义重大。关键路径法可梳理工序逻辑，找出关键路径，为施工进度管理提供科学依据。

1.1.2 应用目标

借助关键路径法，明确大型商业建筑施工各工序的先后顺序与依赖关系，精准识别关键路径及关键工序。以此为基础，优化施工进度计划，合理调配人力、物力、财力等资源，在保障工程质量与安全的前提下，实现项目工期最短化、成本最低化，为施工管理决策提供有力支撑。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

某项目工程由若干作业组成（分别用字母表示），各工序持续时间受资源投入、工艺要求、天气条件等影响，需确定关键路径以保障项目按计划推进。作业的计划完成时间、最短完成时间、缩短一周工期额外增加的费用及作业间关系如下（表1.7）所示：

需解决以下三个问题：

1. 画出该工程的计划网络图；
2. 求完成产品的最短时间，列出各项作业的最早开始时间和计划网络的关键路线；

Table 1.7: 作业参数表

作业	计划完成时间(周)	紧前作业	最短完成时间(周)	缩短一周的费用(元)
A	5	-	5	-
B	10	-	8	700
C	11	-	8	400
D	4	B	4	-
E	4	A	3	450
F	15	C、D	15	-
G	21	B、E	16	600
H	35	B、E	30	500
I	25	B、E	22	300
J	15	F、G、I	12	400
K	20	F、G	16	500

3. 假定工程要求在49周完成（结合后续求解结果补充），各项作业的最短时间和缩短1周的费用如上表所示，求额外增加总费用的最小值。

1.2.2 需求分析

从项目管理角度，需清晰梳理工序逻辑，明确关键工序，以便集中资源保障关键路径；从成本控制角度，通过关键路径优化，减少资源闲置与浪费，降低施工成本；从质量安全角度，关键工序需重点监管，确保施工质量与安全。同时，要应对施工中可能出现的工序延误、资源冲突等问题，借助关键路径法动态调整计划。

1.3 问题建模与方法选择

根据作业间关系，建立计划网络（如图1.36）：

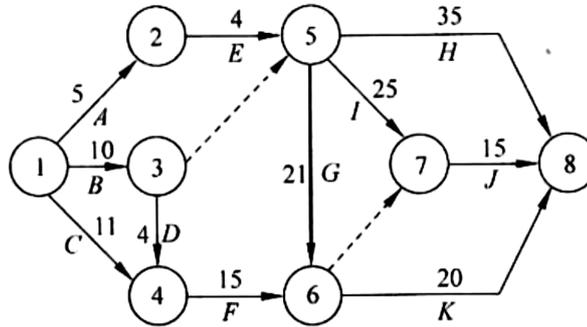


图1.36: 工程计划网络图

需计算的时间参数及记号

定义如下参数记号：

t_{ij} ：作业 (i, j) 的完成时间（完成一项作业所需时间）；

ES_{ij}/LS_{ij} ：作业 (i, j) 的最早/最晚开工时间；

T ：总工期（完成所有作业所需时间，即 $T = x_n - x_1$ ， x_1 为初始节点时间， x_n 为最终节点时间）；

S_{ij} ：作业 (i, j) 可推迟施工的时间（松弛变量）；

$t_{min,ij}$ ：作业 (i, j) 的最短完成时间；

Δt_{ij} ：作业 (i, j) 可能缩短的时间（ $\Delta t_{ij} = t_{ij} - t_{min,ij}$ ）；

c_{ij} ：作业 (i, j) 缩短一周所增加的费用；

T_0 ：要求的总工期。

数学优化模型

（1）问题二模型（最短工期模型）

设 x_i 为事项节点 i 的开始时间（1为初始事件， n 为最终事件）。若每个节点开始时间尽可能早，则总工期最短，目标函数与约束条件如下：

目标函数：最大化总工期（即最小化负工期，适配求解器）

$$\min \quad -(x_n - x_1)$$

或等价表述为：

$$\max \quad x_n - x_1$$

约束条件：

1. 作业时间约束：对任意作业 (i, j) ，节点 j 的开始时间不早于节点 i 开始时间加作业时间

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

2. 松弛变量定义：引入松弛变量 S_{ij} 表示作业可推迟时间

$$S_{ij} = x_j - x_i - t_{ij} \geq 0$$

综上，数学模型整理为：

$$\begin{cases} \max & T = x_n - x_1 \\ \text{s.t.} & x_j - x_i - t_{ij} \geq 0 \quad \forall(i, j) \\ & x_1 = 0 \quad (\text{初始节点时间设为0, 简化计算}) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

(2) 问题三模型（最低赶工费用模型）

目标为“额外增加总费用最少”，同时需输出各作业的早/晚开工时间及关键路线，修正目标函数并补充约束如下：

目标函数：最小化总赶工费用+ 节点时间和（辅助输出关键路线）

$$\min \quad \text{mincost} + \text{sumx} = \sum_{(i,j)} c_{ij} y_{ij} + \sum_i x_i$$

其中 y_{ij} 为作业 (i, j) 的缩短时间（ $0 \leq y_{ij} \leq \Delta t_{ij}$ ）。

约束条件：

1. 作业时间修正约束：作业实际时间为 $t_{ij} - y_{ij}$ ，节点时间满足

$$x_j \geq x_i + (t_{ij} - y_{ij})$$

引入松弛变量 S_{ij} ：

$$S_{ij} = x_j - x_i - (t_{ij} - y_{ij}) \geq 0$$

2. 总工期约束：要求总工期不超过 T_0

$$x_n - x_1 \leq T_0$$

3. 缩短时间限制：作业缩短时间不超过最大可缩短量，且非负

$$0 \leq y_{ij} \leq t_{ij} - t_{\min,ij}$$

综上，数学模型整理为：

$$\begin{cases} \min & \sum_{(i,j)} c_{ij}y_{ij} + \sum_i x_i \\ \text{s.t.} & x_j - x_i - t_{ij} + y_{ij} \geq 0 \quad \forall(i,j) \\ & x_n - x_1 \leq T_0 \\ & 0 \leq y_{ij} \leq t_{ij} - t_{min,ij} \quad \forall(i,j) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

(1) 问题二求解（最短工期）

采用Lingo软件求解，程序代码如下：

```
model:
sets:
    events/1..8/:x;
    operate(events,events)/ 1,2 1,3 1,4 2,5 3,4 3,5 4,6 5,6 5,7 5,8 6,7 6,8 7,8/:s,t;
endsets
data:
    t=5,10,11,4,4,0,15,21,25,35,0,20,15;
enddata
min=@sum(events:x);
@for(operate(i,j):s(i,j)=x(j)-x(i)-t(i,j));
end
```

运行结果详见表1.8。

核心结论：

总工期（最短完成时间）： $\boxed{51}$ 周（ $x_8 - x_1 = 51 - 0$ ）；

各项作业最早开工时间（ $ES_{ij} = x_i$ ）：

A(1,2):0周， B(1,3):0周， C(1,4):0周， D(3,4):10周， E(2,5):5周，
F(4,6):14周， G(5,7):10周， H(5,8):10周， I(5,6):10周， J(7,8):35周， K(6,8):31周；

Table 1.8: 问题二节点时间与松弛变量结果

变量类型	变量名	值	Reduced Cost
节点时间 x_i	X(1)	0.000000	8.000000
	X(2)	5.000000	0.000000
	X(3)	10.00000	0.000000
	X(4)	14.00000	0.000000
	X(5)	10.00000	0.000000
	X(6)	31.00000	0.000000
	X(7)	35.00000	0.000000
	X(8)	51.00000	0.000000
松弛变量 S_{ij}	S(1,2)	0.000000	1.000000
	S(1,3)	0.000000	6.000000
	S(1,4)	3.000000	0.000000
	S(2,5)	1.000000	0.000000
	S(3,4)	0.000000	1.000000
	S(3,5)	0.000000	4.000000
	S(4,6)	2.000000	0.000000
	S(5,6)	0.000000	2.000000
	S(5,7)	0.000000	1.000000
	S(5,8)	6.000000	0.000000
	S(6,7)	4.000000	0.000000
	S(6,8)	0.000000	1.000000
S(7,8)	1.000000	0.000000	

关键路线：松弛变量为0的作业构成，即 $B(1,3) \rightarrow G(5,7) \rightarrow K(6,8)$ 。

(2) 问题三求解（最低赶工费用）

要求工期 $T_0 = 49$ 周，Lingo程序代码如下：

```

model:
sets:
    events/1..8/:x;    operate(events,events)/ 1,2 1,3 1,4 2,5 3,4 3,5 4,6 5,6 5,7 5,8 6,7 6,8
7,8/:s,t,m,c,y;
endsets
data:
    t=5,10,11,4,4,0,15,21,25,35,0,20,15;
    m=5,8,8,3,4,0,15,16,22,30,0,16,12;
    c=0,700,400,450,0,0,0,600,300,400,0,500,400;
    d=49;
enddata
n=@size(events);
min=mincost+sumx;
mincost=@sum(operate:c*y);
sumx=@sum(events:x);
@for(operate(i,j):s(i,j)=x(j)-x(i)-t(i,j)+y(i,j));
x(n)-x(1)=d;
@for(operate(i,j):@bnd(0,y,t-m));
end
    
```

运行结果详见表1.9：

Table 1.9: 问题三核心结果

指标	变量名	值
要求工期	D	49.00000
总目标函数值	Objective value	1349.000
总赶工费用	MINCOST	1200.000
节点时间和	SUMX	149.0000
缩短时间 y_{ij}	Y(1,3) (作业B)	1.000000
	Y(6,8) (作业K)	1.000000

核心结论：

需缩短的作业：作业B（1,3）、作业K（6,8）各缩短1周；

额外增加总费用最小值：1200元。

1.4.2 结果分析

1. **关键路径对工期的影响：**关键路径（B-G-K）上的工序延误将直接导致总工期延长，需重点监控。例如，作业B缩短1周、作业K缩短1周可直接将总工期从51周降至49周，且赶工成本最低（ $700+500=1200$ 元）。

2. **非关键路径的弹性利用：**非关键工序（如A、C、D、E等）存在松弛变量，如 $S(1,4)=3$ 周， $S(2,5)=1$ 周，可在不影响总工期的前提下灵活调整施工时间与资源分配，避免资源闲置。

3. **成本与进度的平衡：**赶工需权衡“赶工成本”与“工期延误损失”。若工期延误1周的损失（如设备租赁费、误工费）超过1200元，则赶工具有经济合理性；反之则需重新评估。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

多项目协同管理

在商业建筑集群项目中，可通过关键路径法协调多个子项目的进度。例如，相邻建筑的基础施工与主体施工存在场地共享、资源共用需求，通过关键路径法统筹规划，可避免资源冲突（如塔吊调度）与进度干扰（如土方运输交叉）。

结合BIM技术

将关键路径法与建筑信息模型（BIM）结合，构建4D（3D模型+时间维度）施工模拟。通过可视化展示施工进度随时间的变化，提前发现工序冲突（如管线安装与墙体施工重叠）、空间占用矛盾，辅助优化关键路径与施工方案。

风险应对与动态调整

针对地质变化、恶劣天气等风险，建立动态进度管理机制：

实时更新工序时间参数（如降雨导致基础施工时间延长）；

重新识别关键路径（非关键路径可能因延误转为关键路径）；

启动应急预案（如采用防雨施工措施、调整施工顺序）。

1.5.2 反思总结

1. **假设条件与实际的差异：**关键路径法假设工序时间稳定、资源充足，但实际施工中工人技能、材料质量、设备故障等均会影响工序时间。需通过历史数据修正工序时间参数（如采用三点估计法：乐观时间、悲观时间、最可能时间），提高模型准确性。

2. **人为因素与沟通协调：**关键路径法的落地依赖各参建方（施工班组、监理、设计单位）的协同。需建立清晰的沟通机制（如每周进度协调会），明确责任界面，避免因“信息滞后”“衔接不畅”导致关键路径延误。

3. **持续改进与优化：**随着AI、大数据技术的发展，可通过以下方式优化关键路径法：
基于大数据预测工序持续时间（如结合类似项目的施工数据）；
利用AI自动识别关键路径变化（如实时监控工序进度并预警）；
实现资源调配的智能化（如自动匹配关键工序的人力、设备需求）。



兰州工业学院
LANZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《概率论与数理统计》 课程应用案例库

案例1 正常人与中毒患者的脉搏差异

1.1 背景简介与应用目标

1.1.1 背景简介

假设检验是统计推断的核心方法，用于判断“样本特征是否能代表总体的真实差异”。在医学、生物等领域，常需通过样本数据（如患者的生理指标）推断“患病群体与正常群体的指标是否存在显著差异”，为疾病诊断、疗效评估提供依据。

1.1.2 应用目标

以“正常人与慢性中毒患者的脉搏差异”为研究对象，利用**t检验**（单样本t检验）判断“慢性中毒患者的脉搏均值与正常人的脉搏均值（72次/分，案例中可能笔误为75，结合计算以75分析）是否存在显著差异”，掌握假设检验的流程与逻辑，为数据科学等专业的“医疗数据分析”提供方法支撑。

1.2 问题描述与需求分析

1.2.1 问题描述

已知正常人脉搏平均为75次/分（案例设定），测得10例慢性中毒患者的脉搏数据：54, 67, 65, 68, 78, 70, 66, 70, 69, 67。患者脉搏服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，判断在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，慢性中毒患者与正常人的脉搏是否有显著差异。

1.2.2 需求分析

需要通过**假设检验的t检验方法**，步骤化分析“样本均值与总体均值的差异是‘随机波动’还是‘本质差异’”：

明确总体与样本：总体为“正常人脉搏”（均值 $\mu_0 = 75$ ），样本为“10例中毒患者脉搏”；
 选择检验方法：总体方差未知、样本量小（ $n = 10$ ）且服从正态分布，用**单样本t检验**；
 确定判断标准：若检验统计量落入“拒绝域”，则认为差异显著；否则认为是随机波动。

1.3 问题建模与方法选择

1.3.1 问题建模

1.假设建立：

原假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 75$ （患者脉搏与正常人无显著差异）；

备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$ （患者脉搏与正常人有显著差异，双侧检验）。

2.检验统计量：

因总体方差 σ^2 未知，用样本方差 s^2 替代，检验统计量为：

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

其中， \bar{X} 为样本均值， s 为样本标准差， n 为样本量， $t(n-1)$ 为自由度 $n-1$ 的t分布。

3.拒绝域：

双侧检验的拒绝域为 $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$ ，其中 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 是t分布的上 $\alpha/2$ 分位数。

1.3.2 方法选择

采用**单样本t检验**，基于“正态分布下，小样本、方差未知时的均值检验”逻辑，通过计算检验统计量 T 并与临界值 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 比较，判断是否拒绝原假设。

1.4 模型求解与结果分析

1.4.1 模型求解

1.计算样本统计量：

样本量 $n = 10$ ，样本均值 $\bar{X} = \frac{54+67+65+68+78+70+66+70+69+67}{10} = 67.4$ ；

样本标准差 $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \approx 5.93$ 。

2.计算检验统计量 T ：

代入 $\mu_0 = 75$, $s = 5.93$, $n = 10$:

$$T = \frac{67.4 - 75}{5.93/\sqrt{10}} \approx \frac{-7.6}{1.87} \approx -4.05$$

取绝对值 $|T| \approx 4.05$ 。

3. 确定临界值与拒绝域:

显著性水平 $\alpha = 0.05$, 自由度 $df = n - 1 = 9$, 查t分布表得 $t_{0.025}(9) = 2.262$, 拒绝域为 $|T| > 2.262$ 。

1.4.2 结果分析

统计决策: 因 $|T| = 4.05 > 2.262$, 检验统计量落入拒绝域, 故**拒绝原假设** H_0 。

实际意义: 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 有充分证据认为“慢性中毒患者的脉搏与正常人的脉搏存在显著差异”, 说明中毒对脉搏有本质影响。

1.5 应用扩展与反思总结

1.5.1 应用扩展

跨领域应用: 假设检验 (t检验、方差分析等) 可推广到“工业质量控制” (如判断生产线产品均值是否偏离标准)、“社会科学调研” (如判断不同群体的收入均值差异) 等领域, 核心是“通过样本推断总体差异的显著性”。

方法拓展: 若样本不服从正态分布或多组比较, 可采用“非参数检验” (如Wilcoxon 检验)、“方差分析 (ANOVA)”等方法, 体现统计方法的灵活性。

1.5.2 反思总结

统计与实际的平衡: 假设检验的“显著差异”是**统计意义上的差异** (排除随机波动), 但需结合实际背景判断“差异是否有实际意义” (如脉搏差异多大才对临床有价值)。

假设检验的逻辑本质: 通过“小概率事件原理” (若原假设为真, 检验统计量落入拒绝域的概率极小, 若发生则拒绝原假设), 将“总体差异的判断”转化为“概率事件的决策”, 体现了统计推断的核心思想。

案例2 全概率公式在可靠性管控中的应用

2.1 背景简介与应用目标

2.1.1 背景简介

自动化生产线中，工业机器人故障会导致生产线停产，造成巨大经济损失（如汽车焊接机器人故障停产1小时可能损失百万）。全概率公式作为“多因素影响下总概率计算”的核心工具，用于量化机器人各部件故障对“整体故障停机”的综合影响，为生产线可靠性管控提供依据。

2.1.2 应用目标

以“工业机器人整体故障概率预测”为核心，借助全概率公式，实现：

- （1）从“部件故障概率”与“部件故障导致整体停机的条件概率”，计算机器人故障概率；
- （2）指导自动化生产线的“冗余设计”“运维计划制定”，提升生产线连续运行效率。

2.2 问题描述与需求分析

2.2.1 问题描述

工业机器人的故障由“驱动系统故障（ A_1 ）、控制系统故障（ A_2 ）、传感器故障（ A_3 ）、执行机构故障（ A_4 ）”这四类互斥且完备的事件（构成样本空间 Ω 的划分）导致；事件 B 为“机器人整体故障停机”。计算 $P(B)$ ，并分析各部件对整体故障的影响。

2.2.2 需求分析

数据层面：需从设备运维记录中提取“各部件故障概率 $P(A_i)$ ”，结合自动化系统冗余设计（如传感器冗余时， $P(B|A_3)$ 降低）确定“部件故障导致整体停机的条件概率 $P(B|A_i)$ ”。

方法层面：利用全概率公式整合“部件级故障信息”与“部件-整体的关联信息”，得到“系统级整体故障概率”，为生产线可靠性分析提供量化结果。

2.3 问题建模与方法选择

2.3.1 问题建模

样本空间划分：设 A_1, A_2, A_3, A_4 为“驱动、控制、传感器、执行机构故障”，满足 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$, 互斥)且 $\bigcup_{i=1}^4 A_i = \Omega$ (完备)，且 $P(A_i) > 0$ 。

全概率公式模型：机器人整体故障概率 $P(B)$ 满足：

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i)$$

$P(A_i)$ 是部件 i 故障的先验概率， $P(B|A_i)$ 是“部件 i 故障时，机器人整体停机”的条件概率。

2.3.2 方法选择

采用全概率公式，通过“分解-整合”思路：先将“整体故障”分解为“各部件故障导致的子事件”，再利用各部件的“故障概率”与“部件对整体的影响概率”，整合得到整体故障概率。

2.4 模型求解与结果分析

2.4.1 模型求解

1. 获取 $P(A_i)$ ：从工厂机器人近1年的运维数据中，统计各部件（驱动、控制、传感器、执行机构）的故障次数，结合运行时长，计算频率近似概率：

$$P(A_i) = \frac{\text{部件}i\text{故障次数}}{\text{总运行单位时长}}。$$

2. 确定 $P(B|A_i)$ ：结合自动化系统设计（如驱动系统无冗余时， $P(B|A_1) \approx 1$ ；传感器有冗余时， $P(B|A_3)$ 降低），通过“故障影响时长统计”或“系统可靠性分析”确定条件概率（如实验或仿真得 $P(B|A_1) = 0.9$ ， $P(B|A_2) = 0.8$ ， $P(B|A_3) = 0.3$ ， $P(B|A_4) = 0.7$ ）。

3. 计算 $P(B)$ ：假设通过数据统计得 $P(A_1) = 0.1$ ， $P(A_2) = 0.15$ ， $P(A_3) = 0.2$ ， $P(A_4) = 0.1$ ，代入全概率公式：

$$P(B) = 0.1 \times 0.9 + 0.15 \times 0.8 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7 = 0.09 + 0.12 + 0.06 + 0.07 = 0.34$$

2.4.2 结果分析

数值意义：机器人在生产周期内故障概率为34%，反映了当前设计下系统可靠性水平。

部件贡献分析：控制系统 (A_2 , $P(A_2)P(B|A_2) = 0.12$) 和驱动系统 (A_1 , $P(A_1)P(B|A_1) = 0.09$) 对整体故障的贡献相对较大，可作为“运维重点”或“冗余设计优化对象”。

2.5 应用扩展与反思总结

2.5.1 应用扩展

跨领域扩展：全概率公式可推广到“复杂系统可靠性分析”（如电力系统、航空设备）、“风险评估”（如金融风险中多因素对违约的综合影响）等领域，只要存在“多互斥因素对某事件的综合影响”，均可通过“分解-整合”的全概率思路分析。

方法拓展：结合“贝叶斯公式”可实现“故障后对部件故障原因的反向推断”（如已知机器人停机，计算是某部件故障的概率）；结合“蒙特卡洛仿真”可处理更复杂的“非确定型条件概率”场景，提升模型的适用性。

2.5.2 反思总结

数学与工程的融合：全概率公式为“工程系统的可靠性量化”提供了严谨的数学工具，将“定性的部件故障影响”转化为“定量的整体故障概率”，体现了“数学模型对工程决策（如运维计划、冗余设计）”的支撑作用。

模型的局限性与优化：全概率公式依赖“样本空间划分的互斥性与完备性”及“准确的 $P(A_i)$ 和 $P(B|A_i)$ ”，实际中部件故障可能存在“相关性”（如驱动故障导致控制模块过载故障），需引入“联合概率”或“贝叶斯网络”优化模型，反映了“理论模型向复杂工程现实逼近”的研究方向。

案例3 中心极限定理在保险中的应用

3.1 背景简介与应用目标

3.1.1 背景简介

保险行业的盈亏分析依赖概率论的“大数定律”与“中心极限定理”：当投保人数足够多时，“个体风险”可通过统计规律转化为“整体可预测的风险”。以老年人寿保险为例，保险公司需通过量化“死亡人数的概率分布”，判断业务的盈亏与收益水平。

3.1.2 应用目标

以“100000人投保的老年人寿保险”为场景，利用**中心极限定理**分析：

- (1) 保险公司亏损的概率；
- (2) 保险公司获得超过80000元收益的概率；

从而揭示保险业务“低风险、高稳定性”的数学本质，辅助保险产品的定价与风险管控。

3.2 问题描述与需求分析

3.2.1 问题描述

假设某保险公司投保人数 $n = 100000$ ，每人保费20元，死亡后赔付8000元，历史死亡率 $p = 0.002$ ，管理费用不计，试计算：①保险公司亏损的概率；②收益超过80000元的概率。

3.2.2 需求分析

死亡人数 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，由于 n 极大（ 10^5 ），计算二项分布概率困难，用**中心极限定理**将二项分布近似为正态分布，简化概率计算，实现对“亏损”“高收益”概率的量化。

3.3 问题建模与方法选择

3.3.1 问题建模

死亡人数的分布：设死亡人数为随机变量 X ，则

$$X \sim B(n, p) \quad (\text{二项分布, } n = 100000, p = 0.002)。$$

中心极限定理的应用：因 n 极大，根据中心极限定理， X 近似服从正态分布 $N(np, npq)$ ，其中 $q = 1 - p = 0.998$ ，计算得：

$$np = 100000 \times 0.002 = 200, \quad npq = 100000 \times 0.002 \times 0.998 \approx 199.6。$$

盈亏的量化关系：保险公司的净利润为：

$$\text{利润} = 20 \times 100000 - 8000X = 2000000 - 8000X。$$

3.3.2 方法选择

采用中心极限定理，将“大样本的二项分布”近似为“正态分布”，通过正态分布的概率计算（标准化后查标准正态分布表），求解“亏损”与“高收益”的概率。

3.4 模型求解与结果分析

3.4.1 模型求解

1. 保险公司亏损的概率（利润 < 0 ）：

$$\text{利润} < 0 \implies 2000000 - 8000X < 0 \implies X > 250。$$

对正态分布 $X \sim N(200, 199.6)$ 标准化，令 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ ，则：

$$P(X > 250) = 1 - P(X \leq 250) \approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 200}{\sqrt{199.6}}\right) = 1 - \Phi(3.539)$$

查标准正态分布表， $\Phi(3.539) \approx 0.9998$ ，故

$$P(X > 250) \approx 1 - 0.9998 = 0.0002。$$

2. 收益超过80000元的概率（利润 > 80000 ）：

$$\text{利润} > 80000 \implies 2000000 - 8000X > 80000 \implies X < 240。$$

标准化后：

$$P(X < 240) \approx \Phi\left(\frac{240 - 200}{\sqrt{199.6}}\right) = \Phi(2.831)$$

查标准正态分布表， $\Phi(2.831) \approx 0.9977$ 。

3.4.2 结果分析

亏损概率：仅为0.02%，说明保险公司几乎不会因“死亡人数过多”亏损，体现了“大数定律下风险的可预测性与分散性”。

高收益概率：约99.77%，说明保险公司极大概率能获得超过80000元的收益，反映了保险业务“低风险、稳定盈利”的特点（基于大量投保者的风险汇聚）。

3.5 应用扩展与反思总结

3.5.1 应用扩展

跨险种扩展：中心极限定理可用于“大样本、独立风险”的保险产品（如车险、健康险），核心是将“个体风险的二项分布（或其他离散分布）”近似为正态分布，快速计算盈亏概率。

金融与风险管理：除保险外，该思想还可用于“金融衍生品定价”（如大量期权的风险汇聚）、“供应链库存管理”（大量订单的需求分布近似）等领域，只要满足“大样本、独立同分布（或弱相关）”，中心极限定理均可简化概率分析。

3.5.2 反思总结

数学与行业的融合：中心极限定理为保险行业的“风险量化”提供了关键工具，将“抽象的概率理论”转化为“可操作的盈亏分析”，是“数学模型驱动行业决策”的典型案列。

模型的前提与局限：中心极限定理的有效性依赖“大样本”与“独立性”，若投保人群存在“相关性风险”（如同一地区突发疾病），则死亡人数的分布会偏离正态，需引入“Copula函数”等工具优化模型。这体现了“理论模型需与实际场景匹配，才能保证分析的准确性”。